

Registrazione di Immagini: Modelli e Metodi

Davide Moroni
Ovidio Salvetti

**Image Registration:
Models and Methods**

Authors: Davide Moroni
Ovidio Salvetti
Affiliation: Signal & Images Laboratory
Institute of Information Science and Technologies (ISTI)
Italian National Research Council (CNR)
Key-words: Image Registration, Non-rigid matching,
Image sequence analysis, Medical Imaging

**Registrazione di Immagini:
Modelli e Metodi**

Autori: Davide Moroni
Ovidio Salvetti
Affiliazione: Laboratorio Segnali & Immagini
Istituto di Scienza e Tecnologie dell'Informazione (ISTI)
Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR)
Key-words: Registrazione di immagini, Allineamenti non-rigidi,
Analisi di sequenze di immagini, Medical Imaging

Foreword

This work has been carried on within the project SIMCAR “A methodology based on multi-source signals and images for the identification of a model oriented toward cardiac surgical simulation.”

The project aims at the identification, development and test of a methodology for the assessment of morpho-functional cardiac parameters, evaluated by means of various diagnostic resources and embedded in a mathematical model oriented toward cardiac surgical simulation. In particular, current medical imaging techniques (such as magnetic resonance imaging and helical CT) provide temporal sequences of morphological data and, thus, information about heart kinematical behavior. At the same time, imaging modalities supply punctual data about tissues characteristic. Other techniques (such as ECG and Pressure/Volume loops) provide a natural temporal reference system as well as global constraints on morpho-functional parameters.

Since comparison of the available heterogeneous data is required, the project plan considers a first step focused on analysis and implementation of spatio-temporal registration techniques. This report offers a review, as far as possible exhaustive, of registration methods and models, giving particular prominence to topics, such as non-rigid registration and analysis of images sequences, whose importance is unquestionable in many applications (including cardiac imaging area). Methods are introduced from a general viewpoint that, as we hope, clarifies, a part from limits and values, the basic assumptions of each one.

Of course, the set of proposed techniques is finally applied in cardiac image analysis, although some, particularly promising, methods, due to very recent introduction, still lack cardiac applications.

Premessa

Questo lavoro è stato svolto nell'ambito del progetto SIMCAR "Una metodologia basata su Segnali e Immagini Multisorgente per l'Identificazione di un Modello orientato alla Simulazione Cardiochirurgica".

Il progetto si propone di individuare, sviluppare e sperimentare una metodologia per l'identificazione di parametri morfo-funzionali cardiaci, ricavati da diverse risorse diagnostiche, da inserire eventualmente in un modello matematico orientato alla simulazione cardio-chirurgica. In particolare, le tecniche di imaging attuali (quali la risonanza magnetica anatomica e funzionale e la tomografia spirale) permettono di ottenere sequenze temporali di dati morfologici e, quindi, informazioni sul comportamento cinematico dell'organo. Nel contempo, le medesime tecniche forniscono dati puntuali sulle caratteristiche costitutive dei tessuti. Altre tecniche (quali tracciati ECG e cicli pressione-volume) provvedono sia un riferimento temporale naturale per le sequenze di immagini, sia vincoli globali sui parametri morfo-funzionali.

Vista la necessità di rendere confrontabili tra loro i dati eterogenei a disposizione, il piano di sviluppo del progetto prevede una prima fase di studio e implementazione di tecniche per la loro registrazione spazio-temporale. In questo contesto, lo scritto presente si propone di fornire una rassegna il più possibile esauriente delle tecniche di registrazione esistenti, dando particolare rilievo ad argomenti, quali registrazione non rigida e analisi di sequenze di immagini, la cui importanza è indiscutibile per svariati e rilevanti settori applicativi (ed anche in ambito cardiaco). I metodi presentati vengono discussi da un punto di vista generale, che, secondo le nostre intenzioni, chiarisce oltre a limiti e pregi le ipotesi su cui ciascuno di essi è basato. Ovviamente, l'insieme di tecniche proposte viene infine istanziato in ambito cardiaco, anche se bisogna segnalare che, data la loro recente introduzione, alcune tecniche particolarmente promettenti non sono ancora state applicate nel caso del cuore.

Indice

1	Introduzione	6
2	Definizione del problema	7
3	Classificazione dei metodi di registrazione	7
4	Modelli di deformazione	9
4.1	Modelli parametrici	9
4.2	Deformazioni libere con vincolo di regolarizzazione	9
5	Basi di registrazione	11
5.1	Metodi Geometric feature based	11
5.1.1	Metodi GFB classici	12
5.1.2	Modelli deformabili	17
5.2	Metodi standard intensity based	21
5.2.1	Classificazione delle Misure di Somiglianza	21
5.3	Metodi Iconic Feature Based	23
5.3.1	Esempio 1: Metodo ICP-like	24
5.3.2	Esempio 2: Demons' Algorithm	25
5.3.3	Formulazione energetica dei metodi IFB	27
6	Registrazione simultanea di insiemi di immagini	28
6.1	Registrazione di sequenze di immagini	30
6.2	Modello statistico di un oggetto	33
7	Applicazioni in ambito cardiaco	35
7.1	Metodi GFB	36
7.2	Metodi SIB	39
7.3	Metodi IFB	41
8	Conclusioni e sviluppi futuri	42

1 Introduzione

Un problema basilare nel campo del medical imaging è rappresentato dalla registrazione delle immagini. Spesso, infatti, diagnosi, studi, modelli hanno come prerequisito il confronto o la fusione di immagini acquisite sul medesimo oggetto o su oggetti della stessa tipologia. La registrazione, il cui scopo è la determinazione di una trasformazione geometrica che allinea i punti delle varie immagini, indica come tale confronto deve essere eseguito.

Scopo di questo scritto è presentare lo stato dell'arte delle tecniche di registrazione. Oltre a fornire un'esauriente classificazione dei metodi disponibili, si è cercato di individuare una formulazione teorica generale, nella quale ogni singola metodologia proposta possa essere inquadrata. Ciò è stato possibile interpretando la registrazione come un problema variazionale: in questo modo ogni tecnica di registrazione equivale alla scelta di un opportuno funzionale sullo spazio degli allineamenti fra le immagini e, eventualmente, allo sviluppo di una strategia *ad hoc* per la sua ottimizzazione. Dopo aver presentato gli approcci possibili per la registrazione di coppie di immagini, si considerano due problemi specifici in cui famiglie di immagini devono essere considerati nella loro globalità: la registrazione 4D di sequenze di immagini e la costruzione per immagini di un modello statistico di un oggetto.

Infine, nell'ambito del progetto SIMCAR "Una metodologia basata su segnali e immagini multisorgente per l'identificazione di un modello orientato alla simulazione cardiocirurgica", le tecniche presentate vengono istanziate nel caso dell'analisi di immagini cardiache, che esibisce un notevole livello di ricchezza e complessità.

In maggior dettaglio, l'organizzazione dello scritto è la seguente. Dopo aver definito il problema della registrazione nella sezione 2, in 3 vengono presentati gli attributi con cui solitamente si classificano i vari metodi, enfatizzando la centralità della *base di registrazione* e del *modello di deformazione*. Varie tipologie di quest'ultimo vengono brevemente presentate nella sezione 4, prima intraprendere lo studio sistematico delle metodologie esistenti classificate secondo la base di registrazione prevista (vedi sezione 5). All'interno di questa parte, le basi di registrazione vengono distinte in tre ampie famiglie che danno luogo rispettivamente a metodi geometric feature-based (5.1), standard intensity-based (5.2) e iconic feature-based (5.3). In 6.1 viene presentato un approccio alla registrazione 4D di sequenze temporali di immagini, mentre in 6.2 si costruisce, utilizzando tecniche di registrazione, un modello statistico ad alta risoluzione di un oggetto. Infine in 7 la teoria sviluppata viene applicata in ambito cardiaco.

Riferimenti bibliografici agli studi considerati vengono forniti di volta in volta, mentre, per le nozioni fondamentali della teoria della registrazione, si

rimanda al manuale [FHM00].

2 Definizione del problema

In questo scritto un'immagine verrà sempre considerata come una funzione scalare $f : \Omega_f \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un dominio $\Omega_f \subset \mathbb{R}^d$, dove, in genere, $d = 2, 3$. Il dominio si riferisce alla regione su cui l'immagine viene acquisita mentre il valore della funzione in un punto indica il livello di grigio associato.

Data una coppia di immagini f e g , lo scopo della registrazione è la determinazione di una trasformazione $T : \Omega_f \rightarrow \Omega_g$ tra i loro domini (a cui ci si riferisce con il nome di allineamento o matching), che soddisfi certe determinate richieste, dipendenti dalla natura delle immagini considerate e dalle applicazioni previste.

Ad esempio, se le immagini ritraggono un medesimo oggetto, è ragionevole richiedere che la trasformazione allinei i punti delle immagini corrispondenti allo stesso punto materiale. Se, invece, le immagini sono acquisite su oggetti della stessa tipologia ma non necessariamente identici, non avendo più significato la richiesta precedente, si può richiedere che il matching metta in corrispondenza strutture di interesse visibili in entrambe le immagini e caratteristiche della classe di oggetti in esame. L'applicazione a cui è destinata la registrazione indica a quale livello debba essere perseguita tale corrispondenza, introducendo, ad esempio, dei vincoli sulla classe di trasformazioni ammesse.

Generalmente, in base a considerazioni sulla natura delle immagini e sulle caratteristiche della trasformazione cercata, viene introdotto un criterio $D(f, g, T)$ che stima la bontà dell'allineamento prodotto da T fra le immagini f e g . Risolvere il problema della registrazione equivale allora ad ottimizzare in T il funzionale $D(f, g, T)$, ossia il matching cercato \bar{T} è dato da:

$$\bar{T} = \arg \min_T D(f, g, T)$$

Nella teoria della registrazione questioni centrali sono rappresentate dunque dalla determinazione di opportuni funzionali $D(f, g, T)$ e dallo sviluppo di tecniche per la loro ottimizzazione. Nel seguito si è optato pertanto per una formulazione continua anziché discreta dell'intera teoria, in cui gli aspetti variazionali del problema risultano essere più chiari.

3 Classificazione dei metodi di registrazione

In ambito medico ci si riferisce solitamente ad un esauriente schema di classificazione che prevede ben nove categorie [MV98] i cui elementi cruciali sono

costituiti dal *modello di deformazione* e dalla *base di registrazione*.

Per *modello di deformazione* si intende la forma matematica della trasformazione generica usata per allineare i punti delle due immagini. La scelta del tipo di mappe utilizzate dipende dalla conoscenza a priori che si ha sulla forma della trasformazione. Ad esempio il disallineamento fra due immagini può essere dovuto a deformazioni fisiche dell'oggetto, a distorsioni spaziali tipiche del dispositivo di acquisizione o, semplicemente, ad un cambio del sistema di riferimento.

Per *base della registrazione* si intendono le caratteristiche delle immagini scelte come guida nel processo di deformazione verso la trasformazione cercata. Ad esempio, se è possibile estrarre tramite segmentazione da entrambe le immagini punti notevoli oppure contorni di oggetti fra cui è nota a priori una corrispondenza, si può cercare la trasformazione che meglio mappa gli oggetti geometrici estratti della prima immagine nei corrispettivi della seconda; il metodo si dirà allora *geometric feature based (GFB)*. Altrimenti, se si confrontano le immagini direttamente secondo una nozione di somiglianza per le funzioni intensità, il metodo si dirà *standard intensity based* o *iconic (SIB)*. Infine i recenti metodi *iconic feature based (IFB)* cercano di mimare la corrispondenza a priori fra i punti che abbiamo nei metodi GFB tramite misure di somiglianza dell'intensità, offrendo un'alternativa ibrida rispetto ai metodi precedenti, come si cercherà di chiarire in seguito.

Con lo scopo di fissare la terminologia, enunciamo brevemente altre categorie considerate in [MV98].

Dimensionalità si riferisce alle dimensioni (2D, 3D) delle immagini considerate.

Grado di interazione indica il controllo che deve esercitare l'operatore nel processo di registrazione. Ci si riferisce in proposito a metodi automatici, semi-automatici, manuali.

Procedura di ottimizzazione indica l'algoritmo mediante il quale il criterio di bontà dell'allineamento viene ottimizzato.

Modalità si riferisce agli strumenti mediante i quali le immagini sono acquisite (e.g. CT, MRI, PET, SPECT,...). Si hanno registrazioni monomodali quando le immagini sono acquisite mediante lo stesso dispositivo (e.g. CT-CT), mentre si tratta di registrazione multimodale se le immagini sono acquisite tramite tecniche diverse (e.g. CT-PET).

Infine con riferimento al *soggetto* si distingue fra registrazioni intrapaziente, interpaziente e atlante.

4 Modelli di deformazione

Fino ad ora, la trasformazione geometrica $T : \Omega_f \rightarrow \Omega_g$ che allinea le immagini f e g è stata considerata semplicemente come una funzione fra i loro relativi domini, senza ulteriori strutture. Tuttavia è spesso desiderabile ottenere una trasformazione che dimostri un certo grado di regolarità o che sia compatibile con certe ipotesi a priori sulla natura del mancato allineamento fra le immagini. Questi vincoli vengono imposti individuando un opportuno modello di deformazione per il problema.

4.1 Modelli parametrici

In questa classe rientrano tutti quei modelli in cui si cerca il miglior allineamento T in una certa classe di trasformazioni \mathcal{T} di dimensione bassa. Esempi molto utili sono dati dai gruppi classici di trasformazioni di \mathbb{R}^d : ad esempio, \mathcal{T} può essere il gruppo delle traslazioni, il gruppo $SO(d)$ delle rotazioni, il gruppo delle trasformazioni rigide (rotazioni + traslazioni), oppure il gruppo affine $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$.

Altrimenti \mathcal{T} può essere definito come la classe di trasformazioni ottenibili mediante un certo tipo di spline con un insieme di punti di controllo assegnato: gli esempi più comuni sono dati dalle B-spline e dalle thin-plate spline. Una volta introdotto un criterio per la bontà dell'allineamento $D(f, g, T)$, il problema della registrazione è ricondotto all'ottimizzazione del funzionale sullo spazio dei parametri, i.e.:

$$\bar{T} = \arg \min_{T \in \mathcal{T}} D(f, g, T) \quad (1)$$

Inoltre, e ciò costituisce la grande differenza con la classe successiva, le proprietà di regolarità della trasformazione seguono automaticamente dall'ipotesi $T \in \mathcal{T}$.

4.2 Deformazioni libere con vincolo di regolarizzazione

In questo caso il matching T fra due immagini è cercato nell'intera classe delle funzioni tra i loro domini. Si dice allora che T è una free form deformation (FFD) e, solitamente, la si descrive mediante il campo di spostamento U associato, ottenuto dalla relazione $T(x) = x + U(x)$. La coerenza spaziale della trasformazione viene recuperata aggiungendo un termine energetico regolarizzante all'espressione in 1. Nei modelli cosiddetti *competitivi* il problema variazionale assume la forma:

$$\bar{U} = \arg \min_U D(f, g, U) + \sigma E_{reg}(U) \quad (2)$$

dove in genere $E_{reg}(U)$ è una forma quadratica nelle derivate parziali di U . Indicando con JU lo Jacobiano di U , una forma suggestiva di energia regolarizzante è data dall'energia elastica:

$$E_{el}(U) = \frac{1}{2} \int \left(\mu \text{tr}(JU)^T JU + (\mu + \lambda) \text{tr}(JU)^2 \right)$$

dove i parametri λ , μ indicano i coefficienti di Lamé del mezzo elastico. Spesso, visto che il rapporto tra immagini e corpi elastici è solo un'analogia, i coefficienti di Lamé non vengono scelti in base a considerazioni fisiche sul comportamento elastico degli oggetti in esame, anche se sono da segnalare importanti eccezioni (cfr. [KH02]).

Nei modelli cosiddetti *incrementali* la ricerca del miglior allineamento è invece impostata in uno schema iterativo, introducendo un termine energetico che penalizza l'irregolarità nell'evoluzione di T . L'algoritmo è il seguente:

1. Determinare una stima iniziale U_0 del campo di spostamento.
2. Inizializzare il contatore $n = 1$.
3. Calcolare

$$U_n = \arg \min_U D(f, g, U) + \sigma E_{reg}(U - U_{n-1}) \quad (3)$$

4. Se $\|U_n - U_{n-1}\| > \varepsilon$, incrementare il contatore $n \rightarrow n + 1$ e ripetere da 3.
Altrimenti ritornare $\bar{T} = \text{Id} + U_n$.

L'espressione matematica di E_{reg} in 3 è ancora una forma quadratica che coinvolge però lo Jacobiano dell'evoluzione $U - U_n$.

L'esito delle ricerche dipende dalla trasformazione iniziale U_0 (scelta nel punto 1 dell'algoritmo) della quale è necessaria una stima accurata per evitare di convergere in minimi locali non desiderati. Come in altre situazioni, tale stima può essere ottenuta tramite un procedimento di registrazione meno raffinato, oppure seguendo un approccio multirisoluzione (vedi fig. 1).

Malgrado le maggiori difficoltà di implementazione rispetto ai modelli competitivi, l'approccio incrementale è d'obbligo quando sono coinvolte grandi deformazioni. Infatti viene mostrato in [CJM97] che, nei metodi competitivi, durante l'ottimizzazione del funzionale tramite gradient descent, il

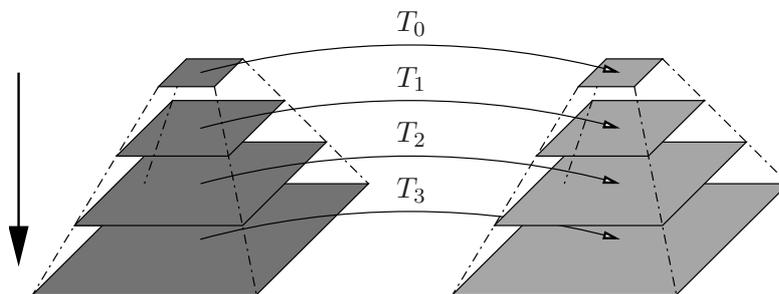


Figura 1: Dalle immagini di partenza si costruisce una piramide di immagini la cui risoluzione diminuisce procedendo dalla base al vertice. Le coppie di immagini dello stesso livello vengono poi registrate utilizzando come trasformazione iniziale per il k -esimo livello un'interpolazione del matching trovato per le immagini del livello $(k - 1)$ -esimo.

determinante della matrice Jacobiana può cambiare segno, indicando così l'indesiderato passaggio per una trasformazione singolare.

5 Basi di registrazione

Le basi di registrazione indicano quali informazioni estratte dalle immagini vengono scelte come guida nel processo di registrazione, o, per essere più precisi, quali caratteristiche concorrono a determinare una forma matematica del criterio di bontà dell'allineamento.

Nel seguito, per comodità espositiva, suddivideremo le basi di registrazione in tre grandi famiglie, a seconda della natura delle informazioni estratte dalle immagini, ma è importante chiarire fin d'ora che i vari metodi proposti possono essere combinati tra loro, dando così luogo ad alternative ibride.

5.1 Metodi Geometric feature based

I metodi Geometric Feature Based (GFB) sfruttano per ottenere la registrazione di una coppia di immagini informazioni a priori sul loro contenuto, ossia sugli oggetti che esse ritraggono. Più precisamente, se ci si aspetta che in ciascuna immagine sia visibile una certa collezione di oggetti, è possibile cercare l'allineamento che li sovrappone in maniera ottimale. Ovviamente, l'uso dei metodi GFB presuppone la capacità di ottenere per segmentazione dalle immagini forme geometriche, quali punti caratteristici e contorni di strutture di interesse, che ne descrivono il contenuto; tale fase di segmenta-

zione è preliminare nei metodi classici (vedi 5.1.1), mentre con l'utilizzo dei modelli deformabili (vedi 5.1.2) registrazione e segmentazione sono ottenute contestualmente.

5.1.1 Metodi GFB classici

Date due immagini f e g , si supponga di aver ottenuto per segmentazione immagini binarie corrispondenti alle forme geometriche degli oggetti rappresentati. Siano X_1, X_2, \dots, X_k le immagini binarie ottenute da f e Y_1, Y_2, \dots, Y_k quelle ottenute da g e si supponga di conoscere a priori che l'allineamento ottimale \bar{T} deve trasformare X_i in Y_i per $i = 1, 2, \dots, k$.

Si cerca, allora, un criterio $D(f, g, T)$ per la bontà dell'allineamento operato da T fra le due immagini in termini del *livello di sovrapposizione* fra $T(X_i)$ e Y_i per $1 \leq i \leq k$; per formalizzare questo concetto si introduce una *misura di discrepanza* tra sottoinsiemi di \mathbb{R}^d .

Si consideri inizialmente il caso di due soli sottoinsiemi $X, Y \subset \mathbb{R}^d$; si vedrà poi come tener conto dell'intera famiglia di oggetti segmentati.

Se essi sono ridotti a due soli punti, i.e $X = \{x\}$ e $Y = \{y\}$, la norma in \mathbb{R}^d è una misura di discrepanza estremamente soddisfacente:

$$D(X, Y, T) = \|Tx - y\| \quad (4)$$

Quando X e Y sono invece curve o superfici, il problema è più complesso, visto che a priori si sa solo che X come insieme deve corrispondere a Y , ma nulla è noto sulla corrispondenza a livello puntuale. Sono state proposte varie soluzioni a questo problema, la più comune delle quali prevede l'utilizzo della corrispondenza data dal *closest point*.

Corrispondenza tramite *closest point* Indicando con $d(x, Y)$ la distanza standard punto-insieme definita da

$$d(x, Y) = \min_{y \in Y} \|x - y\|$$

si può esprimere un'interessante misura di discrepanza fra $T(X)$ e Y mediante:

$$D_{cp}(X, Y, T)^2 = \int_X d(Tx, Y)^2 \quad (5)$$

Intuitivamente, essa quantifica lo spostamento quadratico medio necessario per deformare $T(X)$ in Y . Si noti inoltre che, utilizzando questa definizione, si sta in un certo senso reintroducendo una corrispondenza a livello puntuale,

che non dipende solo da X e da Y , ma anche dalla trasformazione T : il punto $x \in X$ ha come omologo secondo la trasformazione T il punto

$$C_T(x) = \arg \min_{y \in Y} \|Tx - y\|$$

ossia il punto di Y più vicino a $T(x)$, chiamato, in seguito, *closest point*; per un esempio della determinazione di C_T si veda fig. 4 (a). Con questa nuova notazione, l'equazione 5 si può riscrivere nella forma:

$$D_{cp}(X, Y, T)^2 = \int_X \|Tx - C_T(x)\|^2 \quad (6)$$

Algoritmo ICP L'ultima formulazione di $D(X, Y, T)$, pur equivalente alla precedente, suggerisce una procedura iterativa per l'ottimizzazione del funzionale sullo spazio delle deformazioni ammissibili:

1. Determinare una stima iniziale T_0 dell'allineamento.
2. Inizializzare il contatore $n = 1$.
3. Calcolare

$$T_n = \arg \min_T \int_X \|Tx - C_{T_{n-1}}(x)\|^2 \quad (7)$$

4. Se $\|T_n - T_{n-1}\| > \varepsilon$, incrementare il contatore $n \rightarrow n + 1$ e ripetere da 3.
Altrimenti ritornare $\bar{T} = T_n$.

Tale procedura, nota come algoritmo ICP (Iterative Closest Point) [BM92], sfrutta la stima T_n , ottenuta al passo n -esimo, per stabilire una corrispondenza puntuale C_{T_n} fra gli insiemi X e Y che, a sua volta, viene utilizzata per ottenere la successiva stima dell'allineamento. L'importanza della procedura è dovuta alla maggior semplicità del problema in 7 rispetto all'analogo problema per il funzionale in 6; ad esempio, se la registrazione cercata è una trasformazione rigida, T_n è addirittura esprimibile in forma chiusa (cfr. [FHM00] p. 469).

Per la determinazione della stima iniziale T_0 vedi p. 11.

Distance transform - Un'alternativa ad ICP Se, tuttavia, si desidera ottimizzare direttamente il funzionale 6, si noti che è possibile ridurre

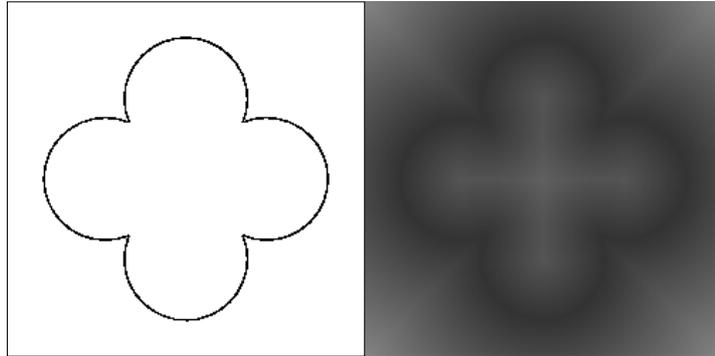


Figura 2: Esempio di distance transform.

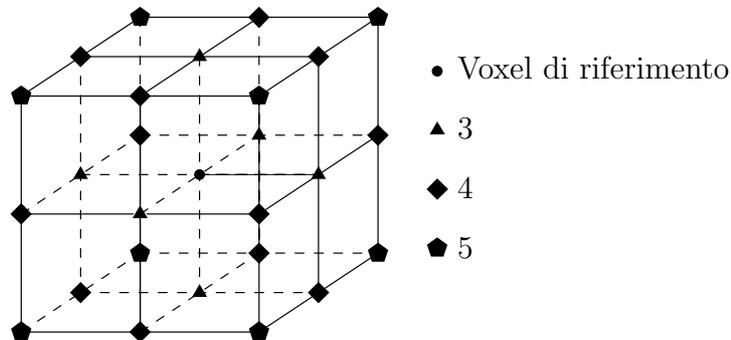


Figura 3: Il metodo chamfer 3-4-5 [Bor84] assegna ad ognuno dei 26 voxel adiacenti ad un voxel di riferimento una distanza intera pari a 3, 4, 5 come schematizzato in figura.

il notevole dispendio di tempo dovuto al calcolo della corrispondenza C_T per mezzo di una cosiddetta *distance transform*: si costruisce a partire dall'immagine binaria Y una nuova immagine h in cui ogni pixel ha come intensità la distanza da Y . Costruita e archiviata tale immagine una volta per tutte, si ha semplicemente

$$\|T(x) - C_T(x)\| = h(T(x))$$

Inoltre, tenuto conto che la segmentazione tramite cui otteniamo coppie di immagini binarie corrispondenti non è immune da errore, nel calcolare la distance transform h si può considerare, invece della vera distanza euclidea, una sua approssimazione intera, come, ad esempio, chamfer 3-4-5 nel caso di immagini 3D (vedi fig. 3).

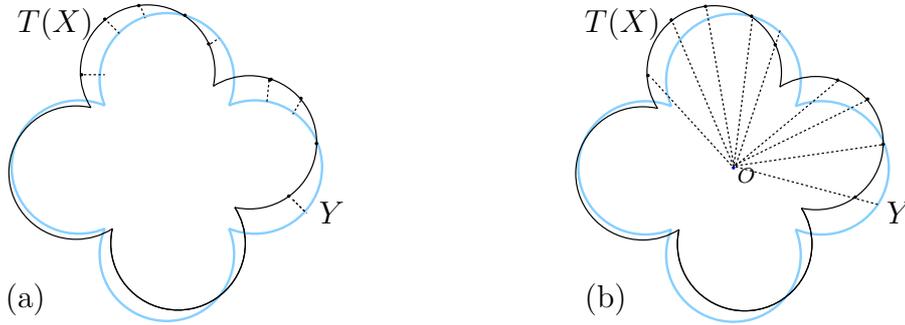


Figura 4: Confronto fra le corrispondenze ottenute tramite closest point (a) e “head and hat” (b). Per un medesimo insieme di punti di $T(X)$ vengono calcolati i punti omologhi secondo i due metodi.

Corrispondenza *Head and Hat* La particolare geometria di un problema può suggerire metodi alternativi all’utilizzo del closest point per definire la corrispondenza C_T . Se è noto a priori che le immagini binarie hanno approssimativamente la forma di una calotta o che, più in generale, sono parametrizzabili tramite coordinate angolari rispetto ad un origine O , si può definire $C_T^{hh}(x)$ come il punto di intersezione fra Y e la semiretta uscente da O e passante per $T(x)$ (vedi fig. 4 (b)). Anche questa corrispondenza può essere utilizzata in uno schema iterativo del tutto simile ad ICP; l’algoritmo che ne deriva, chiamato *head and hat*, è stato proposto in [PCSW89] per la registrazione di immagini del cervello.

Corrispondenza local shape-based La corrispondenza data dal *closest point*, essendo definita in base a considerazioni meramente puntuali rispetto all’insieme sorgente X , non tiene in nessun modo conto della differenza di forma fra $T(X)$ in un intorno di Tx ed Y in un intorno di $C_T(y)$. Quando si tratta di superfici, è possibile (e spesso desiderabile) stabilire una corrispondenza capace di minimizzare la differenza di forma locale tra punti omologhi. Tali idee sono formalizzate tramite il concetto di curvatura. Indicate con k_1, k_2 le curvature principali (cfr. e.g. [doC76]), si definisce la variazione locale di forma fra Tx ($x \in X$) e $y \in Y$ tramite:

$$\epsilon_{be}(Tx, y) = \frac{A}{2}((k_1(Tx) - k_1(y))^2 + (k_2(Tx) - k_2(y))^2)$$

Fisicamente, questa quantità descrive l’energia elastica necessaria a deformare una piccola lamina sottile, appoggiata inizialmente su $T(X)$ in un intorno del punto Tx , in modo che risulti perfettamente aderente a Y in un intorno

del punto y .

La corrispondenza cercata si ottiene, allora, individuando, in un'opportuna palla attorno a $T(x)$, il punto di Y avente forma più affine:

$$C_T^{ls}(x) = \arg \min_{y \in B(Tx, r) \cap Y} \epsilon_{be}(Tx, y)$$

La misura di discrepanza associata si ottiene in maniera simile a 6, considerando:

$$D(X, Y, T)_{ls}^2 = \int_X \|Tx - C_T^{ls}(x)\|^2 \quad (8)$$

Ancora una volta, l'ottimizzazione di questo funzionale può essere ottenuta attraverso un algoritmo iterativo simile ad ICP. Infine, per citare una variazione della formulazione in 8, in [SSCD99] viene introdotta una stima $\eta(x)$ del confidence level della corrispondenza C_T^{ls} in ogni punto $x \in X$, che viene utilizzata come peso per le varie distanze $\|Tx - C_T^{ls}x\|$:

$$D(X, Y, T)_{ls} = \int_X \eta(x) \|Tx - C_T^{ls}(x)\|^2$$

Asimmetria delle misure di discrepanza È importante sottolineare, infine, che negli schemi proposti i ruoli di X e Y non sono simmetrici. Infatti le funzioni di discrepanza non sono invarianti per lo scambio sorgente-destinazione, i.e. in generale $D(X, Y, T) \neq D(Y, X, T^{-1})$. Un'ulteriore perdita di simmetria si ha nell'implementazione del metodo: infatti è spesso necessario rappresentare X tramite una mesh di punti. Per questi motivi bisogna scegliere scrupolosamente quale delle due immagini deve svolgere il ruolo statico di riferimento e quale, invece, deve subire il processo di deformazione. La qualità della registrazione è in genere migliore se si sceglie come riferimento l'immagine con risoluzione più elevata.

Misure di discrepanza globali Vediamo ora come considerare simultaneamente tutte le caratteristiche geometriche estratte dalle due immagini. Secondo le notazioni descritte all'inizio della sezione, per ogni coppia di immagini binarie corrispondenti (X_i, Y_i) sia $D_i(X_i, Y_i, T)$ una funzione di discrepanza opportunamente scelta. Allora una funzione di discrepanza globale si può ottenere, ad esempio, tramite:

$$D(f, g, T)^2 = \sum_{i=1}^k w_i D_i(X_i, Y_i, T)^2 \quad (9)$$

Dove w_i è un peso che viene assegnato tenendo conto dell'affidabilità delle caratteristiche geometriche X_i e Y_i . Ad esempio si può prendere w_i inversamente proporzionale al quadrato dell'errore commesso nell'individuare la caratteristica X_i . Gradient descent oppure un algoritmo iterativo, a seconda delle singole funzioni di discrepanza scelte, consentono di ottimizzare il funzionale 9 e di ottenere così la registrazione cercata.

Un metodo neurale per il matching 3D In [BS02] il problema della registrazione di oggetti tridimensionali viene affrontato da un punto di vista radicalmente diverso. Si supponga, secondo la solita notazione, di avere a disposizione un oggetto X nell'immagine sorgente ed un oggetto Y nell'immagine di destinazione. Dopo aver rappresentato X, Y come mesh di punti, la mesh sorgente (SM) è pensata come una rete neurale, mentre la mesh destinazione (TM) è considerata come uno spazio di stimoli per tale rete. Le modifiche, subite dalla rete durante la fase di apprendimento, definiscono una deformazione che trasforma X in Y .

In maggior dettaglio, ogni stimolo $y \in TM$ individua un neurone più eccitato $Wy \in SM$, chiamato *winner*, che rappresenta, a livello geometrico, il punto della mesh sorgente avente maggiore affinità con y . La ricerca del winner viene effettuata considerando sia nozioni di tipo geometrico (e.g. la distanza fra lo stimolo e il neurone), sia misure di somiglianza locali per le relative funzioni di intensità (vedi 5.2)¹.

La rete viene allora aggiornata deformando i punti in un opportuno intorno di Wy :

$$SM \cap B(Wy, r) \ni x \mapsto x + H \exp\left(-\frac{\|x - Wy\|}{R}\right) \cdot \frac{y - Wy}{\|y - Wy\|} \in \mathbb{R}^d$$

Ossia, ogni punto nell'intorno viene traslato nella direzione di $y - Wy$ di un fattore che decade esponenzialmente all'allontanarsi da Wy . Il raggio r della palla attorno a Wy così come i parametri di deformazione H, R possono essere aggiornati nel corso del processo di apprendimento, seguendo, ad esempio, una strategia coarse to fine.

5.1.2 Modelli deformabili

I modelli deformabili (chiamati anche snakes, active contours, balloons), introdotti nel seminal paper [KWT88] e generalizzati nel caso 3D in [TKW88]

¹Questo metodo non è pertanto puramente geometric feature based.

[TM91], hanno trovato un largo campo di applicazione che include segmentazione, pattern recognition, animazione computerizzata, simulazione chirurgica, motion tracking e, naturalmente, compiti di registrazione. È quindi chiaro, data la vastità dell'argomento, che i modelli deformabili meriterebbero una trattazione a sé; non possiamo che limitarci ad una breve panoramica, rimandando a [XPP00] [MDSA00] per una trattazione più completa.

Un modello deformabile è una curva o una superficie, definita nel dominio dell'immagine, che si può deformare, come se si trattasse di un filo o di una membrana, sotto l'azione di un campo di forze. In genere, vengono introdotte forze interne (tipo tensione superficiale) in grado di mantenere liscio il modello durante la sua evoluzione e forze esterne *data driven* specificatamente progettate per guidare la deformazione verso il contorno desiderato. Ad esempio è possibile, una volta fornita una curva iniziale, modificarla, sotto l'azione di un opportuno campo di forze, in modo che essa converga verso il bordo di un oggetto visibile in un'immagine.

Nel campo della registrazione, i modelli deformabili consentono di trovare un allineamento tra i punti di bordo di determinate strutture di interesse visibili in un set di immagini, ottenendone contemporaneamente la relativa segmentazione. Sebbene il matching così trovato sia solo parziale, esso è completo nella regione di interesse delle immagini; è tuttavia noto che, mentre la componente dello spostamento nella direzione ortogonale è affidabile, le informazioni nelle direzioni tangenziali al modello sono piuttosto povere. Esistono peraltro metodi volti ad integrare con l'utilizzo di modelli deformabili metodi classici di registrazione (vedi e.g. [MD97]).

Ogni metodologia basata su modelli deformabili deve considerare, in genere, una rappresentazione del contorno, il *design* di opportune forze interne ed esterne (o dei loro potenziali, se possibile) ed infine un metodo di soluzione delle equazioni differenziali di evoluzione.

Rappresentazioni dei contorni Una curva o una superficie può essere rappresentata in maniera discreta o continua. Con una rappresentazione discreta la sua geometria è nota solo in un insieme finito di punti. Seguendo questa strada una curva viene rappresentata tramite punti e relazioni di adiacenza tra di essi, in modo da ricostruirne un'approssimazione poligonale. Nel caso delle superfici si può scegliere tra triangolazioni, mesh simpliciali [Del99] (complesso duale alla triangolazione), sistemi di particelle [DG96] e modelli spring-mass [VT92][BLS03] che, come suggerisce il nome, inglobano la definizione delle forze interne.

I modelli continui, sebbene debbano essere discretizzati per esigenze computazionali, offrono l'opportunità di calcolare in linea di principio quantità dif-

ferenziali, come normali e curvature, in un qualunque punto della superficie, permettendo di ottenere, a volte, accuratezza sub-pixel. Nei modelli espliciti, come B-spline e superquadriche, i contorni sono espressi in forma parametrica (ad esempio una curva si esprime mediante $t \mapsto (u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$), mentre in quelli impliciti sono ottenuti come insiemi di livello di funzioni, quali polinomi, iperquadriche [CC94], e funzioni in dimensione superiore [Set96], in grado di gestire mutamenti nella topologia del modello.

Forze nei modelli deformabili Il design delle forze interne dipende, naturalmente, dalla modalità di rappresentazione scelta per l'active contour. Nel caso di rappresentazioni continue, una scelta piuttosto comune consiste nel mimare l'energia interna di una membrana, ottenuta integrando la tensione superficiale, o, più in generale, energie regolarizzanti (stabilizzatori di Tichonoff) analoghi a quelli presentati in 4.2. Nei casi discreti si considerano forze radiali di tipo elastico (secondo la legge di Hook), forze di interazione di Lennard-Jones (mutuate dalla meccanica molecolare) e forze di coesione (vedi fig. 5).

Le forze esterne, che devono guidare il modello verso la struttura da ricostruire, devono dipendere ovviamente dai dati delle immagini. Una scelta classica è considerare, per un'immagine f , l'energia potenziale $U = -\alpha \|\nabla f\|^2$, che attrae il modello verso gli edge di f . Questa espressione, oltre ad essere molto semplice, ha il vantaggio di essere esprimibile in forma energetica e, quindi, di poter essere calata in uno schema variazionale. Spesso essa viene integrata con altre forze esterne quali forze di pressione [Coh91], *distance potential force* [CC94], *spring and volcano forces* [KWT88] che ne estendono il raggio d'azione. Altri tipi di campi di forze includono il *gradient vector flow* [XP98], basato sulla formulazione differenziale del flusso ottico, superiore nel trattare le concavità rispetto ai metodi precedenti (vedi fig. 6), e forze basate sulle proprietà fisico-meccaniche degli oggetti rappresentati [BLS03].

Evoluzione dei modelli deformabili In linea di principio, introdotta una rappresentazione del contorno e stabilite le forze che vi agiscono, è possibile risolvere il problema di statica associato, individuando direttamente il contorno cercato come configurazione di equilibrio. Tuttavia, poiché spesso esistono molteplici configurazioni di equilibrio approssimate, si preferisce scegliere un approccio evolutivo. Dato un contorno iniziale X_0 , si cerca una famiglia ad un parametro di contorni $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ che ne rappresenti l'evoluzione dinamica secondo le forze introdotte in precedenza, addizionate con un termine di smorzamento di tipo viscoso. La famiglia $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ si stabilizza

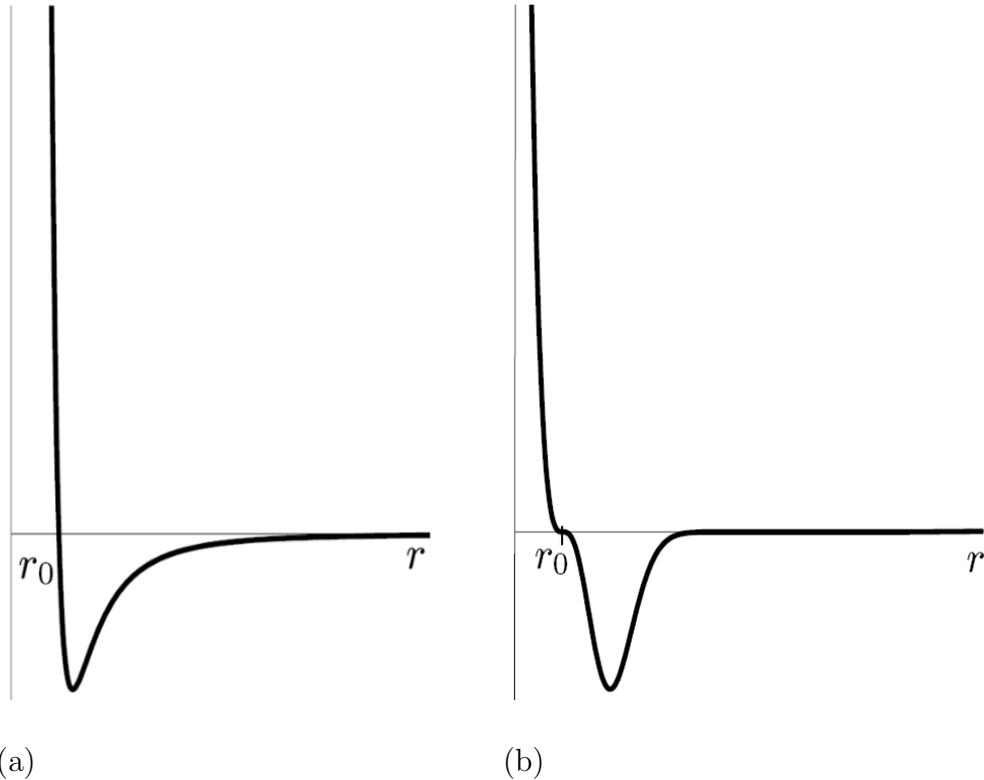


Figura 5: Confronto fra forza di Lennard-Jones (a) e forza di coesione (b) [Lom96]: grafici delle intensità in funzione della distanza. La differenza fondamentale è rappresentata dal comportamento in un intorno del punto di equilibrio r_0 , che è stazionario (ossia a derivata nulla) nel grafico (b).

per $t \rightarrow \infty$ verso un contorno limite X , che è il risultato cercato. A livello computazionale le equazioni sono discretizzate tramite metodi alle differenze finite o agli elementi finiti (FEM).

Modelli deformabili nell'ambito della registrazione L'approccio evolutivo ai modelli deformabili consente di ottenere la registrazione di un oggetto di interesse, visibile in una famiglia di immagini. In una prima fase si sceglie un'immagine di riferimento e si rappresenta, in maniera discreta o parametrica, un contorno approssimato della relativa vista dell'oggetto in esame; applicando opportuni campi di forze, tale contorno viene deformato in modo da ottenere una segmentazione dell'oggetto nell'immagine di riferimento. Tale risultato viene successivamente utilizzato come dato iniziale

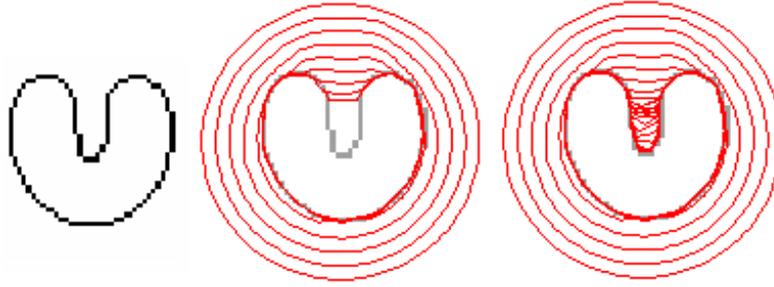


Figura 6: Segmentazione della forma U mediante *gradient vector flow*.

per il processo di deformazione nelle rimanenti immagini. In questa seconda fase, per ogni immagine considerata, il modello converge verso una segmentazione della relativa vista, mentre l'evoluzione dal contorno di partenza a quello finale stabilisce una corrispondenza geometrica tra i loro punti, che viene utilizzata come matching.

Nel trattare sequenze temporali di immagini si può facilmente migliorare la procedura, utilizzando il risultato finale dell'evoluzione ad un certo istante come dato iniziale per il processo all'istante successivo.

5.2 Metodi standard intensity based

I metodi Standard Intensity Based (SIB) si propongono di valutare direttamente la discrepanza di due immagini confrontandone le funzioni di intensità. A differenza dei metodi GFB classici essi non richiedono nessuna estrazione di features preliminare. Più precisamente date due immagini $f : \Omega_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \Omega_g \rightarrow \mathbb{R}$ e un morfismo $T : \Omega_f \rightarrow \Omega_g$, ci si propone di valutare la qualità dell'allineamento prodotto fra le immagini mediante:

$$E_{sim}(f, g, T) = I(f, g \circ T)$$

dove I è un'opportuna misura nello spazio delle funzioni definite su Ω_f , che chiameremo *misura di somiglianza*.

5.2.1 Classificazione delle Misure di Somiglianza

Per scegliere una misura di somiglianza adatta al particolare problema in esame, è necessario considerare preliminarmente quale è la relazione attesa fra le funzioni di intensità delle due immagini, nel caso esse fossero perfettamente allineate. Si cercherà poi una funzione I che misura lo discostarsi da

questa relazione.

Relazione identica Un'ipotesi piuttosto comune nel caso di registrazione monomodale è data dalla *relazione identica*: se le immagini vengono perfettamente allineate, allora le loro funzioni di intensità coincidono, i.e. $f \equiv g$. Esempi di misure di somiglianza basate su questa ipotesi sono:

$$\begin{aligned} \text{SSD}(f, g) &= \int_{\Omega} (f(x) - g(x))^2 = \|f - g\|_2^2 \\ \text{SAD}(f, g) &= \int_{\Omega} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|_1 \end{aligned}$$

dove SSD indica la somma dei quadrati delle differenze e, nell'abituale schema continuo, equivale al quadrato della norma L_2 , mentre SAD è la somma dei valori assoluti delle differenze, corrispondente alla norma L_1 . Meno utilizzate sono altre funzioni di somiglianza (con dipendenza funzionale sempre in $f - g$), come, ad esempio, l'entropia dell'immagine differenza. È importante osservare che, pur essendo basate sulla stessa ipotesi di relazione nel caso ideale, le due misure di somiglianza proposte hanno doti di robustezza diverse. Ad esempio, si può mostrare che SSD è la misura migliore se le due immagini differiscono solo per rumore gaussiano.

Relazione affine Si può altrimenti supporre che, se perfettamente allineate, le immagini sono legate da una *relazione affine* - i.e. $\exists \alpha, \beta : f = \alpha g + \beta$. Una misura di somiglianza basata su questa ipotesi è il coefficiente di correlazione:

$$\text{CC}(f, g) = \frac{\langle f - \bar{f}, g - \bar{g} \rangle}{\|f - \bar{f}\| \|g - \bar{g}\|}$$

dove con \bar{f} si intende la media e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare in L_2 . Il coefficiente di correlazione è massimo e pari a 1 se f si ottiene da g mediante una trasformazione affine.

Relazione funzionale Più in generale, si può pensare all'esistenza di una *relazione funzionale* tra f e g - i.e. $\exists \phi : f = \phi \circ g$. In questo caso la definizione di I comporta due scelte di natura leggermente diversa. Infatti date f e g è necessario in primo luogo indicare come trovare una funzione $\hat{\phi}$ in modo che f e $\hat{\phi} \circ g$ siano le più simili possibili. Si deve poi stimare quanto le due funzioni continuano comunque a discostarsi. In [RMAP98] si suggerisce per il primo punto di minimizzare la varianza di $f - \phi \circ g$:

$$\hat{\phi} = \arg \min_{\phi} \text{Var}(f - \phi \circ g)$$

e di valutare la qualità del fitting ottenuto tramite il rapporto di correlazione (RC):

$$\text{RC}(f, g) = 1 - \frac{\text{Var}(f - \hat{\phi} \circ g)}{\text{Var}(f)}$$

Una convalida teorica di queste scelte è stata fornita nell'ambito di un interessante quadro statistico unificante [RMA99], che va però aldilà delle intenzioni del presente scritto.

Essendo di recente di introduzione, il numero di applicazioni in letteratura del rapporto di correlazione è ancora esiguo. Una misura strettamente collegata ad RC è tuttavia molto utilizzata: la Partitioned Intensity Uniformity (PIU). Questa misura è stata introdotta in [WMC93] in base a considerazioni euristiche che hanno poi trovato convalida teorica tramite il rapporto di correlazione.

Relazione statistica Infine si ha una misura basata sull'esistenza di una *relazione statistica*: la mutua informazione. Indicate con $p_f(a)$, $p_g(b)$ e $p_{f,g}(a, b)$ le distribuzioni di probabilità della prima immagine, della seconda e la probabilità congiunta delle due, la mutua informazione è definita da:

$$\text{MI}(f, g) = \int p_{f,g}(a, b) \log \frac{p_{f,g}(a, b)}{p_f(a)p_g(b)} da db \quad (10)$$

La mutua informazione misura il livello di dipendenza fra le variabili aleatorie coinvolte ed è, in questo senso, una misura di quanto un'immagine spiega l'altra.

Osserviamo che la mutua informazione non si inserisce in una categoria fondamentalmente diversa dalla precedente: infatti il caso ideale prevede sempre dipendenza funzionale. Tuttavia (cfr. [RMA99]) è teoricamente più robusta in presenza di rumore. Peraltro, alcuni esempi sintetici hanno messo in luce che, a volte, il rapporto di correlazione può individuare in maniera più efficiente della mutua informazione il corretto allineamento. In tali esempi MI esibisce un numero di massimi locali intrattabile, mentre RC converge direttamente verso la registrazione corretta [RMAP98].

5.3 Metodi Iconic Feature Based

I metodi Iconic Feature Based si propongono di fondere gli ingredienti che stanno alla base dei metodi GFB (5.1) e dei metodi SIB (5.2). Come si è visto, nei metodi GFB la registrazione è effettuata minimizzando una funzione di discrepanza, ossia una “distanza” geometrica, fra oggetti segmentati, mentre i metodi SIB prevedono la minimizzazione di una “distanza” fra le

funzioni di intensità delle immagini coinvolte.

I metodi IFB introducono, tramite una misura di somiglianza, una corrispondenza ausiliaria C e richiedono che il matching T abbia la minima distanza geometrica possibile da questa corrispondenza. Per chiarire il loro funzionamento, discutiamo subito due esempi.

5.3.1 Esempio 1: Metodo ICP-like

Data un'immagine $f : \mathbb{R}^d \supset \Omega_f \rightarrow \mathbb{R}$, indichiamo con Γ_f il suo grafico definito da $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \Omega_f\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Muniamo inoltre \mathbb{R}^{d+1} della norma

$$\|(x, t)\|^2 = \sigma\|x\|^2 + t^2 \quad x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$$

dove il parametro σ è introdotto per omogeneizzare i termini ad una comune unità di misura. Con queste premesse, il metodo ICP-like [FDMA97] si propone di registrare due immagini f e g , applicando una forma modificata dell'algoritmo ICP (vedi p. 13) ai loro grafici Γ_f e Γ_g :

1. Determinare una stima iniziale T_0 dell'allineamento.
2. Inizializzare il contatore $n = 1$.
3. Calcolare la corrispondenza ausiliaria tramite closest point:

$$C_n(x) = \arg \min_{y \in \Omega_g} d\left((T_{n-1}(x), f(x)), (y, g(y))\right) \quad (11)$$

4. Calcolare la successiva stima del matching:

$$T_n = \arg \min_T \|T - C_n\|^2 + E_{reg}(T) \quad (12)$$

dove E_{reg} è un termine energetico regolarizzante.

5. Se $\|T_n - T_{n-1}\| > \varepsilon$, incrementare il contatore $n \rightarrow n + 1$ e ripetere da 3.
Altrimenti ritornare $\bar{T} = T_n$.

È facile vedere che l'equazione 11 può essere espressa equivalentemente come la soluzione del problema di minimo:

$$C_n = \arg \min_{C \text{ FFD}} (\text{SSD}(f, g \circ C) + \sigma\|T_{n-1} - C\|^2) \quad (13)$$

È quindi evidente che la determinazione della trasformazione ausiliaria C_n coinvolge una misura di somiglianza delle funzioni intensità (in questo caso SSD), mentre sia nell'equazione 12 sia nella 13 si considera la distanza geometrica tra la trasformazione ausiliaria e la stima del matching.

5.3.2 Esempio 2: Demons' Algorithm

L'algoritmo dei "diavoletti", di maxwelliana memoria, è un metodo di registrazione delle immagini basato sull'equazioni differenziali del flusso ottico [Thi95].

La registrazione viene considerata come un processo evolutivo che conduce dall'immagine di partenza f a quella di arrivo g . Più in dettaglio, supponiamo data una famiglia continua di immagini $I(t)$ parametrizzata dal tempo t , che ritrae l'evoluzione temporale di un oggetto \mathcal{O} e che verifica $I(0) = f$ e $I(1) = g$. Dato un punto materiale $p \in \mathcal{O}$ indichiamo con $x(p, t)$ la sua traiettoria. Un'ipotesi fondamentale nella teoria del flusso ottico, basata sull'assunzione che un qualunque punto materiale viene osservato con la stessa intensità in tutte le immagini, è la legge di conservazione dell'intensità lungo le traiettorie:

$$\frac{d}{dt}I(t)(x(p, t)) = 0 \quad (14)$$

Indicato con $V = V(x, t)$ il campo delle velocità, in coordinate euleriane l'equazione 14 assume la forma:

$$V(x, t) \cdot \nabla I(t) = -\frac{d}{dt}I(t)(x)$$

Supponendo che il campo di spostamento sia piccolo in modulo, ha senso approssimare la precedente equazione al primo ordine, ottenendo:

$$V \cdot \nabla f = f - g \quad (15)$$

dove V è ora a tutti gli effetti il campo di spostamento. Quindi, l'equazione 15 determina la componente dello spostamento nella direzione del gradiente di f . Facciamo l'ulteriore ipotesi che esso non abbia componenti nelle altre direzioni, ottenendo così:

$$V = \frac{(f - g)\nabla f}{\|\nabla f\|^2} \quad (16)$$

L'equazione appena trovata presenta, però, un notevole difetto. Infatti è immediato osservare che il campo di spostamento diverge quando ∇f è nullo e, quindi, i punti in cui la norma del gradiente è piccola (e quindi la direzione

dello stesso non è affidabile) contribuiscono in maniera incontrollata al campo di spostamento. In [CPA99], viene introdotta la correzione euristica :

$$V = \frac{(f - g)\nabla f}{\|\nabla f\|^2 + \alpha^2(f - g)^2} \quad (17)$$

dove α è un parametro di omogeneizzazione. In questo modo il campo di spostamento è limitato in modulo da $\frac{1}{2\alpha}$, infatti:

$$\|V\| = \frac{\|\nabla f\| |f - g|}{\|\nabla f\|^2 + \alpha^2(f - g)^2} = \frac{1}{2\alpha} \left(1 - \frac{(\|\nabla f\| - \alpha|f - g|)^2}{\|\nabla f\|^2 + \alpha^2(f - g)^2}\right) \leq \frac{1}{2\alpha}$$

Riassumendo, basandosi sulle equazioni del flusso ottico, è possibile determinare una FFD, rappresentata dal campo di spostamento V , che collega l'immagine f all'immagine g . Essa, tuttavia, non può essere usata come matching definitivo fra le immagini poiché, essendo stata individuata in base a sole considerazioni puntuali, è priva della dovuta coerenza spaziale. Inoltre l'approssimazione al primo ordine su cui si fonda è valida solo per piccoli spostamenti.

È possibile ovviare a queste limitazioni utilizzando un algoritmo iterativo:

1. Determinare una stima iniziale \bar{U}_0 del campo di spostamento.
2. Inizializzare il contatore $n = 1$.
3. Calcolare il campo di spostamento residuo V_n tramite la formula 17 applicata ad f e $g \circ (Id + \bar{U}_{n-1})$.
4. Ottenere da V_n un nuovo campo di spostamento residuo regolarizzato \bar{V}_n (ad esempio tramite termine energetico regolarizzante).
5. Calcolare il campo di spostamento globale U_n come composizione di \bar{U}_{n-1} e \bar{V}_n .
6. Regolarizzare U_n ottenendo infine la nuova stima \bar{U}_n .
7. Se $\|\bar{U}_n - \bar{U}_{n-1}\| > \varepsilon$, incrementare il contatore $n \rightarrow n + 1$ e ripetere da 3.
Altrimenti ritornare $\bar{T} = Id + \bar{U}_n$.

Secondo le definizioni presentate in 4.2, la regolarizzazione del punto 4 è di tipo incrementale, mentre quella del punto 6 è competitiva. Nell'articolo

originale [Thi95] si opta per la sola regolarizzazione competitiva, ottenuta applicando un filtro gaussiano.

Per concludere individuamo dove sono stati usati gli ingredienti distintivi dei metodi IFB. L'utilizzo di una distanza geometrica tra trasformazione ausiliaria e matching è evidente nel processo di regolarizzazione; invece una nozione di "distanza" tra le funzioni intensità delle immagini compare solo implicitamente all'interno dell'ipotesi del flusso ottico. In effetti, approssimando al secondo ordine la misura di somiglianza SSD, si ottiene una formula sorprendentemente simile a 17.

5.3.3 Formulazione energetica dei metodi IFB

È possibile dare una formulazione variazionale piuttosto generale dei metodi IFB. Scelta una misura di somiglianza E_{sim} (ad esempio tra quelle presentate in 5.2) e un termine energetico regolarizzante, consideriamo il funzionale:

$$E(C, T) = E_{sim}(f, g, C) + \sigma(\|C - T\|^2 + \tau E_{reg}(T)) \quad (18)$$

In questa formula, C , legato alla misura di somiglianza, rappresenta la corrispondenza ausiliaria, mentre T , che compare nell'energia regolarizzante, indica il matching cercato. Le due variabili C , T sono legate tra loro dal termine $\|C - T\|$ che considera la distanza geometrica che intercorre fra loro. La registrazione delle due immagini f e g si ottiene minimizzando il funzionale 18 nelle due variabili C , T e prendendo come matching il valore di \bar{T} trovato, i.e.

$$\bar{T} = \arg_T \min_{C, T} E(C, T)$$

Alla luce di queste considerazioni, il metodo ICP-like si reinterpreta come algoritmo di ottimizzazione in due passi del funzionale $E(C, T)$, ottenuto prendendo $E_{sim} = SSD$. Più precisamente, data una stima iniziale T_0 del matching, il passo n -esimo dell'algoritmo ICP-like equivale a porre:

$$\begin{aligned} C_n &= \arg \min_C E(C, T_{n-1}) \\ T_n &= \arg \min_T E(C_n, T) \end{aligned}$$

Confronto con i metodi SIB competitivi Nella loro formulazione energetica, i metodi IFB possono essere pensati come un'estensione dei metodi di registrazione SIB con regolarizzazione competitiva. Infatti, data una misura di somiglianza E_{sim} definiamo:

$$E_{sim}^*(f, g, T) = \min_{C \text{ FFD}} (E_{sim}(f, g, C) + \sigma\|C - T\|^2)$$

Con questa nuova notazione, la registrazione IFB consiste nella minimizzazione del funzionale

$$E^*(T) = E_{sim}^*(f, g, T) + \sigma\tau E_{reg}(T)$$

che è esattamente lo stesso funzionale previsto per lo schema SIB competitivo, se si eccettua il fatto che la misura di somiglianza E_{sim} è stata sostituita dalla sua trasformata E_{sim}^* (cfr. eq. 2). Da un punto di vista teorico, quindi, i metodi IFB equivalgono alla definizione di nuove (e più raffinate) misure di somiglianza, ottenute come trasformate delle misure classiche. Va da se, però, che le misure E_{sim}^* non possono essere usate direttamente nel problema variazionale e, quindi, operativamente, si procede comunque all'ottimizzazione in (C, T) del funzionale in 18.

Per quanto riguarda invece la qualità della registrazione prodotta, i metodi IFB individuano in genere un matching che esibisce un livello di regolarità più uniforme rispetto ai metodi SIB competitivi. Questi ultimi, infatti, tendono a determinare trasformazioni poco lisce lungo gli edge delle immagini ed oversmoothed nelle regioni a basso contrasto. Inoltre i metodi classici prevedono un unico parametro σ che deve tener conto sia del grado di regolarità richiesto alla soluzione, sia del livello di rumore. Nei metodi IFB invece queste due caratteristiche vengono disaccoppiate mediante l'introduzione dei due parametri σ e τ . Per una discussione più approfondita di questi temi ed interessanti esperimenti sintetici si rimanda a [CA01].

6 Registrazione simultanea di insiemi di immagini

In alcune applicazioni, quali la registrazione di sequenze di immagini e l'individuazione della forma statistica di un oggetto, è spesso necessario disporre di un metodo di registrazione simultanea di una famiglia di immagini. Purtroppo, le metodologie sin qui esposte, considerando singolarmente ogni coppia di immagini, non sono adatte a trattare nella sua globalità un insieme di immagini; infatti, applicando coppia per coppia una delle tecniche discusse, gli allineamenti ottenuti non sono tra di loro consistenti. In termini più precisi, considerato un insieme di immagini $\{f_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}\}_{1 \leq i \leq n}$, sia $T_{ij} : \Omega_i \rightarrow \Omega_j$ il matching tra l' i -esima e la j -esima immagine, individuato tramite uno dei

criteri descritti finora. Allora i diagrammi

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega_i & \xrightarrow{T_{ij}} & \Omega_j \\
 \text{Id} \downarrow & \swarrow T_{ji} & \\
 \Omega_i & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \Omega_i & \xrightarrow{T_{ij}} & \Omega_j \\
 T_{ik} \downarrow & \swarrow T_{jk} & \\
 \Omega_k & &
 \end{array}
 \tag{19}$$

non sono in generale commutativi, fatto che si esprime dicendo che la registrazione prodotta non è consistente per concatenazione. Discutiamo preliminarmente il primo diagramma, che non è che un caso particolare del secondo; esso mostra che la registrazione, pur dovendo essere idealmente simmetrica per lo scambio sorgente-destinazione, esibisce un'asimmetria che va ascritta a diverse ragioni:

1. In generale il criterio utilizzato di bontà dell'allineamento $D(f_i, f_j, T)$ non è invariante per lo scambio: $D(f_i, g_i, T) \neq D(f_j, f_i, T^{-1})$.
2. I metodi di ottimizzazione del criterio per gradient descent o iterativi introducono un'ulteriore perdita di simmetria, in parte dovuta alla scelta di una stima iniziale dell'allineamento.
3. Infine, qualora l'algoritmo preveda l'applicazione di un filtro regolarizzante $T \rightarrow \bar{T}$, l'azione di quest'ultimo, in genere, non commuta col passaggio all'inverso, i.e.: $(\bar{T})^{-1} \neq \bar{T}^{-1}$.

Al primo punto si può ovviare, al costo di una maggiore complessità computazionale, simmetrizzando il criterio di bontà dell'allineamento. Una scelta ovvia consiste nel sostituire $D(f_i, f_j, T)$ con

$$E(T) = \frac{1}{2} \left(D(f_i, f_j, T) + D(f_j, f_i, T^{-1}) \right) \tag{20}$$

Gli altri due punti sono invece problematici e, essendo legati agli aspetti implementativi dei vari metodi, possono essere risolti solo tramite lo sviluppo di algoritmi alternativi (ad esempio per il punto 2, si può considerare un algoritmo di ottimizzazione globale tipo *simulated annealing*).

Torniamo ora al problema più generale di registrare una famiglia di immagini in maniera consistente. Una soluzione al problema, nello spirito dell'equazione 20, consiste nell'esibire un criterio di registrazione simultanea che forzi la consistenza per concatenazione dei matching:

$$E(T_{ij}, 1 \leq i \neq j \leq n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} D(f_i, f_j, T_{ij}) + \sigma \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} \|T_{jk} \circ T_{ij} - T_{ik}\|^2 \tag{21}$$

dove $D(f_i, f_j, T_{ij})$ indica, al solito, un criterio di bontà dell'allineamento, mentre σ è un parametro di trade-off tra il livello di consistenza desiderato e aderenza, coppia per coppia, al criterio standard. I termini T_{ii} , (che, si noti, non sono considerati tra le variabili di E) vengono definiti come l'identità: $T_{ii} \equiv \text{Id}_{\Omega_i}$. È possibile ottimizzare il funzionale dell'equazione 21 procedendo con una minimizzazione alterna in $n(n-1)$ passi nelle variabili T_{ij} , ma, come ci si aspetta, il metodo diviene impraticabile per n grande a causa dell'estrema pesantezza computazionale. A questo livello di generalità non ci sono noti altri metodi più efficienti di registrazione simultanea, tuttavia per le seguenti applicazioni specifiche di nostro interesse sono disponibili algoritmi alternativi.

6.1 Registrazione di sequenze di immagini

Le tecniche di registrazione possono essere utilizzate per analizzare una sequenza di immagini di un oggetto, ricavandone informazioni sul suo comportamento cinematico. Più precisamente, si supponga di avere una successione di immagini $(f_t : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R})_{0 \leq t \leq n}$, che ritrae l'evoluzione temporale di un oggetto \mathcal{O} . Scelto come istante di riferimento il tempo $t = 0$, obiettivo di questa sezione è determinare allineamenti $T_{0,t} : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ in modo che, per ogni punto materiale $p \in \mathcal{O}$, la successione $\{T_{0,t}(p)\}_{0 \leq t \leq n}$ fornisca una stima accurata della sua traiettoria rispetto al sistema di riferimento del dispositivo di acquisizione.

Si osservi che non è opportuno calcolare individualmente i vari matching $T_{0,t}$ considerando solo la coppia di immagini coinvolte: infatti, il rischio che un algoritmo di registrazione termini in un minimo locale indesiderato aumenta considerevolmente all'aumentare della diversità fra le immagini e, quindi, frame distanti possono non essere direttamente confrontabili. Inoltre le singole registrazioni coppia per coppia non possono giovare di considerazioni basate sulla continuità temporale del moto.

D'altro canto pur essendo possibile ottenere direttamente un matching preciso e affidabile fra frame contigui $T_{t,t+1} : \Omega_t \rightarrow \Omega_{t+1}$, definire semplicemente $T_{0,t}$ come la composizione $T_{0,t} = T_{t-1,t} \circ T_{t-2,t-1} \circ \dots \circ T_{0,1}$ produce un allineamento affetto da un pesante errore di concatenazione.

Per queste ragioni è necessario analizzare la sequenza di immagini da un punto di vista globale. È possibile utilizzare lo schema proposto nell'equazione 21, ma, visto che in questo caso le immagini sono naturalmente ordinate, è possibile seguire un altro algoritmo. Posto $S_t = T_{t-1,t}$ ($1 \leq t \leq n$) e fissato un comune criterio di bontà dell'allineamento D , è possibile descrivere un metodo iterativo che utilizza per la stima di ciascun S_i le stime precedentemente ottenute per gli altri matching, in modo da minimizzare l'errore di

concatenazione. Più precisamente il primo passo consiste nello stimare S_1 ; visto che non è disponibile nessun'altra stima, esso è ottenuto direttamente ottimizzando:

$$E_1(S_1) = D(f_0, f_1, S_1)$$

Al secondo passo si cerca una stima per S_2 richiedendo che:

1. S_2 sia un matching fra f_1 e f_2
2. S_2 sia compatibile con la stima già ottenuta per S_1 , nel senso che $S_2 \circ S_1$ sia un matching fra f_0 e f_2 .

Per soddisfare tali richieste è sufficiente ottimizzare il funzionale:

$$E_1(S_2) = \lambda_1 D(f_1, f_2, S_2) + \lambda_2 D(f_0, f_2, S_2 \circ S_1)$$

dove λ_1, λ_2 sono parametri di trade off fra le due richieste. All' i -esimo passo la stima di S_i date S_1, S_2, \dots, S_{i-1} si ottiene, analogamente, ottimizzando

$$E_1(S_i) = \sum_{s=1}^i \lambda_s D(f_{i-s}, f_i, S_i \circ S_{i-1} \circ \dots \circ S_{i-s+2} \circ S_{i-s+1}) \quad (22)$$

dove il peso λ_s indica la priorità relativa assegnata alla richiesta che $S_i \circ S_{i-1} \circ \dots \circ S_{i-s+1}$ sia un matching fra f_{i-s} e f_i . In pratica, è ragionevole scegliere un vettore peso $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ con entrate non negative, decrescenti e, eventualmente, nulle oltre un certo indice.

Avendo ottenuto con questo metodo una stima per tutte le mappe S_i , può essere necessario procedere ad un ulteriore raffinamento: infatti, visto che le prime stime effettuate hanno un carattere spiccatamente locale, esse introducono un bias nelle successive che su di queste sono basate. È possibile eliminare questo bias applicando ripetutamente un modulo iterativo simile al precedente, il cui passo fondamentale consiste nell'ottenere una nuova stima di un certo S_i dati tutti gli altri matching $\{S_k\}_{i \neq k}$ ottimizzando:

$$\begin{aligned} E_2(S_i) &= \sum_{s=1}^i \lambda_s D(f_{i-s}, f_i, S_i \circ S_{i-1} \circ \dots \circ S_{i-s+2} \circ S_{i-s+1}) + \\ &+ \sum_{s=1}^{n-i} \lambda_{s+1} D(f_{i-1}, f_{i+s}, S_{i+s} \circ S_{i+s-1} \circ \dots \circ S_{i+1} \circ S_i) \end{aligned} \quad (23)$$

In definitiva, l'algoritmo proposto è riassunto nella tabella 1 (cfr. [YSS04]). Nel caso lo studio si rivolga all'analisi di oggetto in moto periodico, ovvie modifiche all'algoritmo proposto permettono di ottenere una registrazione globale consistente con il vincolo di ciclicità del moto.

(a) *Determinare le stime iniziali.*

SET $S = (S_i)_{1 \leq i \leq n}$

FOR ($i = 1; i \leq n; i ++$)

$$S_i = \arg \min_{S_i} \sum_{s=1}^i \lambda_s D(f_{i-s}, f_i, S_i \circ S_{i-1} \circ \dots \circ S_{i-s+2} \circ S_{i-s+1})$$

(b) *Raffinamento iterativo delle stime.*

SET $S^k = (S_i^k)_{1 \leq i \leq n}$

$k = 0, S^k = S.$

DO ($k = 1; k \leq \max; k ++$)

FOR ($i = 1; i \leq n; i ++$)

$$\begin{aligned} S_i^k &= \arg \min_{S_i} \sum_{s=1}^i \lambda_s D(f_{i-s}, f_i, S_i \circ S_{i-1}^k \circ \dots \circ S_{i-s+1}^k) + \\ &+ \sum_{s=1}^{n-i} \lambda_{s+1} D(f_{i-1}, f_{i+s}, S_{i+s}^{k-1} \circ S_{i+s-1}^{k-1} \circ \dots \circ S_i) \end{aligned}$$

WHILE $\max_{1 \leq i \leq n} \|S_i^{k-1} - S_i^k\| > \varepsilon.$

RETURN ($\bar{S} = S^k$)

Tabella 1: Algoritmo iterativo per la registrazione di sequenze di immagini.

Vincoli di regolarità temporale Le idee sin qui sviluppate per la registrazione di una sequenza di immagini non prendono in considerazione nessuna nozione di regolarità temporale del campo delle velocità e, di conseguenza, forniscono una schematizzazione corretta per i problemi che coinvolgono urti o altri tipi di forze impulsive. Se, tuttavia, è noto a priori che il moto è regolare e si desidera sia ottenere un campo delle velocità liscio sia sfruttare questa informazione, è possibile modificare i due algoritmi proposti: basterà semplicemente introdurre un termine energetico che penalizza l'irregolarità nell'evoluzione del campo delle velocità. A titolo di esempio, i funzionali delle equazioni 22 e 23 possono venir rimpiazzati rispettivamente da:

$$\begin{aligned} E'_1(S_i) &= E_1(S_i) + \sigma \|S_i \circ S_{i-1} - 2S_{i-1} + \text{Id}_{\Omega_{i-2}}\|^2 \\ E'_2(S_i) &= E_2(S_i) + \sigma (\|S_i \circ S_{i-1} - 2S_{i-1} + \text{Id}_{\Omega_{i-2}}\|^2 + \\ &\quad + \|S_{i+1} \circ S_i - 2S_i + \text{Id}_{\Omega_{i-1}}\|^2) \end{aligned}$$

6.2 Modello statistico di un oggetto

Quando si ha a disposizione un certo insieme di immagini di un oggetto \mathcal{O} , è possibile procedere a considerazioni statistiche sui dati acquisiti. In questo contesto, un'immagine si può considerare come un insieme di misure effettuate sui vari punti materiali dell'oggetto; obiettivo di questa sezione è sviluppare un metodo, basato sulle tecniche di registrazione, per ottenere una media significativa di tali misure.

Più precisamente, si supponga di aver acquisito immagini $\{f_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}\}_{1 \leq i \leq n}$ di un oggetto \mathcal{O} e di aver ottenuto, tramite segmentazione, un sottoinsieme $\mathcal{O}_i \subset \Omega_i$ corrispondente alla forma dell'oggetto nell'immagine f_i ($1 \leq i \leq n$). Ci si può porre le seguenti domande:

1. È possibile individuare, partendo dalle immagini acquisite, un'immagine media \bar{f} ?
2. Qual è la forma statistica $\bar{\mathcal{O}}$ dell'oggetto?

Si supponga, preliminarmente, di disporre di una famiglia di matching ideali $T_{ij} : \Omega_i \rightarrow \Omega_j$ ($1 \leq i, j \leq n$) tale che 1) sia priva di errore di concatenazione e 2) allinei perfettamente i punti materiali di \mathcal{O} . È allora sensato confrontare la misura $f_i(x)$ ottenuta in $x \in \Omega_i$ con le misure $\{f_j(T_{ij}(x))\}_{1 \leq j \leq n}$ trovate nei punti omologhi ad x . Si può così definire un'immagine media g_i sul dominio Ω_i tramite

$$g_i(x) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq j \leq n} f_j \circ T_{ij}$$

Inoltre si può esprimere la trasformazione media a cui è soggetto il dominio Ω_i per i matching $\{T_{ij}\}_{1 \leq j \leq n}$ tramite:

$$S_i = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq j \leq n} T_{ij}$$

Posto $\Omega = S_i(\Omega_i)$, si definisce *forma statistica* di \mathcal{O} il sottoinsieme $\bar{\mathcal{O}} = S_i(\mathcal{O}_i) \subset \Omega$ e *immagine media naturale* $\bar{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $\bar{f} = g_i \circ S_i^{-1}$.

Nelle nostre ipotesi ideali $\bar{\mathcal{O}}$ e \bar{f} sono ben definiti, i.e. indipendenti dalla scelta di i . Infatti scelto un altro indice i^* si ha:

$$\begin{aligned} S_{i^*} &= S_i \circ T_{i^*i} \\ \bar{\mathcal{O}}^* &= S_{i^*}(\mathcal{O}_{i^*}) = S_i(T_{i^*i}\mathcal{O}_{i^*}) = S_i(\mathcal{O}_i) = \bar{\mathcal{O}} \\ \bar{f}^* &= g_{i^*} \circ S_{i^*}^{-1} = g_i \circ T_{i^*i} \circ S_{i^*}^{-1} = g_i \circ S_i^{-1} = \bar{f} \end{aligned}$$

Per giustificare le definizioni fatte, osserviamo che la forma statistica $\bar{\mathcal{O}}$ rappresenta il modello dell'oggetto \mathcal{O} che necessita, in media, della minore deformazione per adeguarsi ad \mathcal{O}_i ($1 \leq i \leq n$); l'immagine media naturale consente, invece, di individuare un dominio intrinseco di riferimento in cui considerare la media delle immagini. Infine si noti che se le immagini differiscono solo per disallineamenti e rumore gaussiano, il signal to noise ratio (SNR) dell'immagine media naturale è migliorato di un fattore \sqrt{n} rispetto alle immagini di partenza.

Queste considerazioni mostrano che si può rispondere ai quesiti sopra menzionati mediante un procedimento di registrazione simultaneo della famiglia delle immagini acquisite. Ad esempio, ottimizzando il funzionale 21, si riesce a stimare una buona approssimazione delle famiglia di matching ideali. Si osservi, tuttavia, che questo metodo fornisce un insieme di dati ben più ampio di quello che serve per determinare $\bar{\mathcal{O}}$ e \bar{f} : infatti, sarebbe sufficiente conoscere gli allineamenti tra una sorgente prefissata e le rimanenti immagini, mentre si è costretti, con notevole dispendio di tempo, a calcolarli fra tutte le coppie $(f_i, f_j)_{1 \leq i, j \leq n}$. Un metodo più efficiente per la determinazione di $\bar{\mathcal{O}}$ e \bar{f} si ottiene con il seguente algoritmo iterativo:

```

 $k = 0, i = \text{rand}(n), \bar{f}_k = f_i, \bar{\mathcal{O}}_k = \mathcal{O}_i.$ 

DO ( $k = 1; k \leq \text{max}; k++$ )
    FOR ( $j = 1; j \leq n; j++$ )
         $T_j = \arg \min D(\bar{f}_{k-1}, f_j, T_j)$ 

         $S = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq j \leq n} T_j$ 
         $\bar{\mathcal{O}}_k = S(\bar{\mathcal{O}}_{k-1})$ 
         $\bar{f}_k = \frac{1}{n} \left( \sum_{1 \leq j \leq n} f_j \circ T_j \right) \circ S^{-1}$ 

WHILE  $\|S - \text{Id}\| > \varepsilon.$ 

RETURN  $((\bar{\mathcal{O}}, \bar{f}) = (\bar{\mathcal{O}}_k, \bar{f}_k))$ 

```

L'algoritmo stima inizialmente $(\bar{\mathcal{O}}, \bar{f})$ registrando singolarmente ogni f_j ($1 \leq i \leq n$) rispetto ad un'immagine di riferimento f_i scelta in maniera random. Si noti che questa scelta introduce una fonte di bias, in quanto gli allineamenti trovati non si possono inserire, in generale, in una famiglia di matching consistente per concatenazione. Il necessario raffinamento si ottiene applicando ripetutamente un modulo esattamente uguale a quello iniziale, ma in cui si utilizza come immagine di riferimento al passo k la stima ottenuta al passo $k - 1$.

Per quanto riguarda gli aspetti implementativi, è ragionevole scegliere un criterio di bontà dell'allineamento $D(f, g, T)$ con un addendo geometric feature based in modo da sfruttare la segmentazione di \mathcal{O} disponibile in ciascuna immagine (per \bar{f}_k , senza ricorrere ad un'ulteriore segmentazione, si scelga l'insieme $\bar{\mathcal{O}}_k$).

Studi sperimentali sulla convergenza di algoritmi di questa tipologia sono presentati in [FRN01] [GMJP99].

7 Applicazioni in ambito cardiaco

Nel corso degli ultimi anni, si è assistito ad un vivace sviluppo nel campo dell'imaging cardiaco; la necessità di diagnosi precoci e di metodologie di pianificazione cardiocirurgica, data l'elevata incidenza e varietà delle patologie

cardiovascolari, mostrano che la rilevanza clinica di tali studi non può essere sottostimata; inoltre, i progressi ottenuti nel campo della computer vision e dell'image understanding, uniti alle nuove potenzialità offerte dagli strumenti diagnostici, hanno aperto la strada all'analisi della dinamica cardiaca, essenziale nello sviluppo di modelli meccanici dell'organo.

L'utilizzo di tecniche di registrazione in ambito cardiaco è fondamentale per molteplici scopi: la fusione di dati provenienti da diverse modalità, l'analisi della cinematica cardiaca, la determinazione di una forma statistica dell'organo e il confronto di immagini e sequenze di immagini acquisite su pazienti diversi. Il cuore, per la ricchezza e la complessità dei dati che si possono acquisire, rappresenta quindi un eccellente banco di prova per le tecniche fin qui discusse.

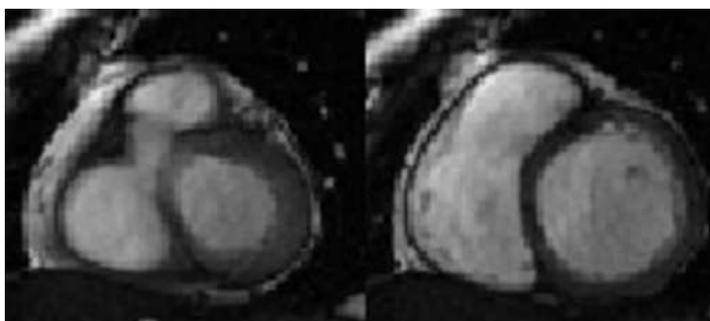


Figura 7: Immagini MR del cuore corrispondenti alle fasi di sistole e diastole. Dati forniti dall'Istituto di Fisiologia Clinica-CNR. L'intero ciclo cardiaco è rappresentato mediante una sequenza di 30 immagini ($\Delta t = 30\text{ms}$), ciascuna costituita da 11 slice con risoluzione 256^2 . (Scanner: FIESTA Genesis GEMS con opzione FASTGEMS)

7.1 Metodi GFB

Come si è visto, per ottenere la registrazione di due immagini tramite metodi geometric feature based è necessario poter estrarre dalle immagini considerate un insieme di caratteristiche geometriche sufficientemente ricco da poter individuare l'allineamento ottimale. Il caso del cuore è problematico per due ragioni. Da un lato esso mostra pochi punti di riferimento (*landmark*) rispetto ad altre regioni anatomiche; dall'altro, data la sua struttura non rigida, sarebbe opinabile registrare le immagini tramite trasformazioni curve, che necessitano di un maggior numero di punti di controllo.

Vediamo tuttavia quali oggetti geometrici possono essere segmentati da immagini cardiache, iniziando con quelli di dimensione zero: i punti fiduciali. Essi possono essere estrinseci o intrinseci. Un punto fiduciale estrinseco è definito come il centroide di un'opportuna marca spaziale introdotta nell'anatomia in esame. Ad esempio marche esterne possono essere applicate alla cute in maniera non invasiva. In genere permettono la registrazione in tutte le modalità in cui la marca è visibile e possono essere individuate indipendentemente da patologie in atto nell'organo. Ovviamente il loro uso è limitato alla registrazione inter-paziente e non possono essere usate retrospettivamente, ma uno svantaggio più severo è rappresentato dal fatto che la registrazione di marche esterne non garantisce un'adeguata registrazione del cuore.

I punti fiduciali intrinseci vengono individuati invece come punti peculiari dell'anatomia in esame. Nel caso del cuore si possono considerare il centroide dei muscoli papillari oppure gli estremi inferiori del setto e delle pareti laterali. Tuttavia questi *landmark* non possono essere individuati con sufficiente precisione e, inoltre, condizioni patologiche, come ischemie, possono occultarli. Un'ulteriore possibilità è data dalle intersezioni delle linee di cresta sulla superficie del miocardio [PAT00], che possono essere individuate automaticamente una volta fornita la superficie in questione. Non ci sono note tuttavia applicazioni facenti uso di quest'ultima tipologia di punti in ambito cardiaco e, quindi, non è attualmente possibile confrontare la registrazione che si ottiene considerando come caratteristiche geometriche le sole intersezioni delle linee di cresta, anziché l'intera superficie che è stato comunque necessario segmentare.

Oltre alle varie tipologie di punti fiduciali sopra discusse, è possibile estrarre dalle immagini anche i contorni degli organi interessati. Considerato che i dispositivi diagnostici tomografici acquisiscono di norma immagini di una regione toracica ben più ampia di quella occupata dal cuore, si può ricorrere a porzioni della superficie del torace e dei polmoni per compiere la registrazione delle immagini. In effetti queste superfici sono facilmente individuabili in un'ampia classe di modalità (MR, CT, SPECT, PET), tanto che è spesso sufficiente eseguire la segmentazione tramite valore di soglia (esistono anche approcci più raffinati che utilizzano modelli deformabili). Tuttavia per garantire una migliore registrazione della ROI (cioè il cuore e in particolare il ventricolo sinistro) è necessario utilizzare i bordi dell'organo ossia l'endocardio e l'epicardio. A causa del minor contrasto però la segmentazione di queste due superfici è difficoltosa e gli algoritmi trovati in letteratura non sono mai completamente automatici. In [DFGB97] [FSPC91] vengono proposti model-based surface detector che sfruttano informazioni a priori sulla forma della superficie. Essi utilizzano un sistema di coordinate ibrido sferico-

cilindrico e suppongono che ogni raggio intersechi una sola volta l'endocardio. Sono stati utilizzati rispettivamente per ottenere registrazione intrapaziente SPECT (via algoritmo ICP) e multimodale SPECT-MR (tramite corrispondenza "head and hat").

In [SSC⁺95] è stato proposto l'uso di operatori morfologici per segmentare l'endocardio e l'epicardio. La procedura è solo parzialmente automatica, visto che i parametri di definizione degli operatori morfologici introdotti non riescono a tener conto delle grandi differenze anatomiche che si osservano tra i vari pazienti. Tuttavia, una volta ottenuta la segmentazione da immagini MR e PET, è stato possibile effettuare una registrazione tra le due utilizzando una corrispondenza tipo "head and hat".

Infine, i modelli deformabili si sono dimostrati un prezioso strumento nel-

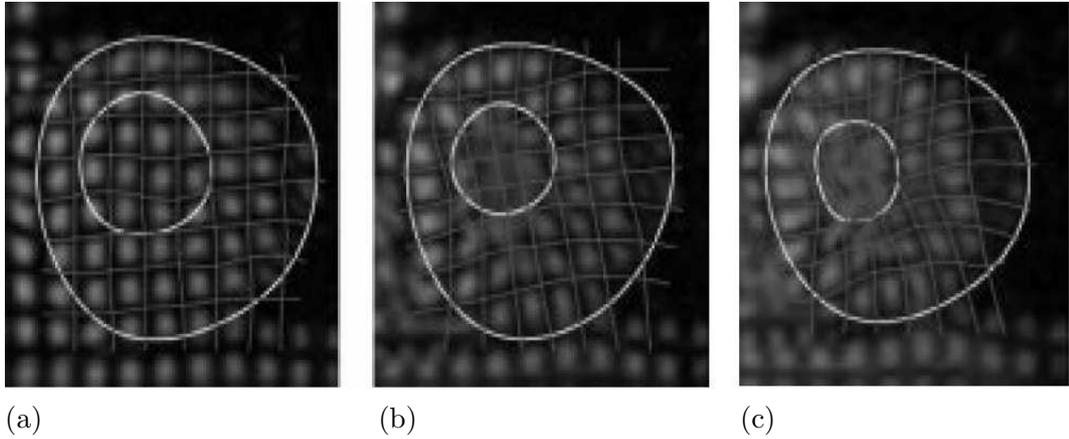


Figura 8: Sequenza Tagged-MRI del cuore ($\Delta t = 90\text{ms}$). L'immagine (a), ottenuta subito dopo la modulazione di magnetizzazione, ritrae la fine diastole [ACC⁺98].

l'analisi di sequenze temporali ottenute tramite *tagged MRI*. Questa tecnica, sviluppata in [AD89], permette di modulare un pattern di magnetizzazione nell'oggetto in esame, prima di iniziare l'acquisizione dati. Essendo la magnetizzazione introdotta una proprietà della materia, le deformazioni dell'oggetto possono essere quantificate mediante le distorsioni del pattern associato. Si veda fig. 8.

I convenzionali scanner MRI permettono di modulare pattern bidimensionali all'interno del miocardio, introducendo così, in ogni singola slice, una sorta di sistema riferimento curvilineo in grado di quantificare il moto 2D apparente. Varie metodologie basate su modelli deformabili sono state utilizzate per stabilire corrispondenze fra le linee del pattern a vari istanti tempora-

li ed ottenere, quindi, una stima del moto: in [YAD⁺93][YKDA95] si opta per un modello massa-molla e per l'utilizzo di metodi agli elementi finiti, in [ACC⁺98] si usano griglie accoppiate di snake basati su B-spline, mentre si considerano superquadriche in [PMA95].

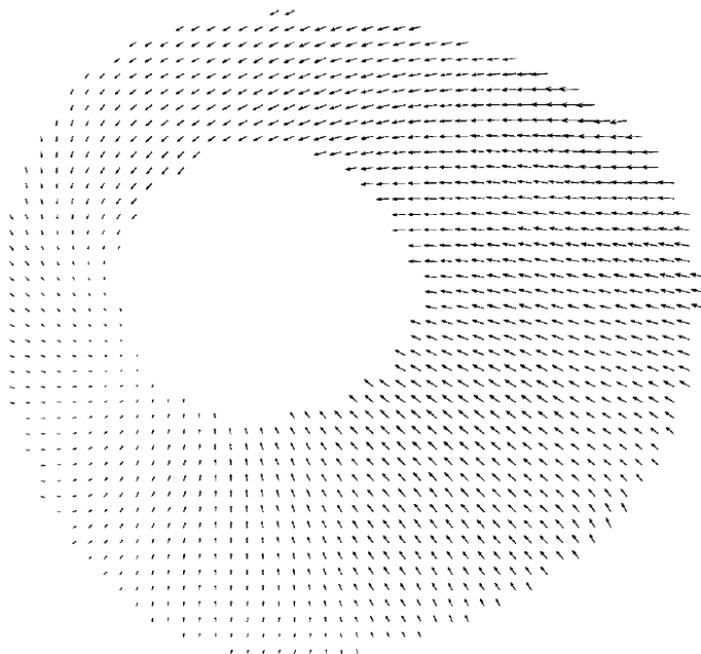


Figura 9: Matching fra le immagini 8(a)-(b)

7.2 Metodi SIB

Le misure di somiglianza, descritte in 5.2, hanno trovato impiego in algoritmi completamente automatici per la registrazione di immagini cardiache.

Le misure di somiglianza SSD e SAD, essendo basate sull'ipotesi piuttosto restrittiva di relazione identica, sono state usate soprattutto per registrazioni monomodali. In [HDH⁺93] le due misure sono state messe a confronto simulando vari tipi di disallineamenti e rumori in immagini SPECT; non sono state osservate sperimentalmente differenze di comportamento di rilievo fra le due misure.

In [BV01] SSD è stata applicata ad immagini MR di perfusione per correggere artefatti dovuti al movimento del paziente e, in particolare, alla respirazione. Infatti, il tempo di acquisizione di tali dati, che è dell'ordine di 3 minuti,

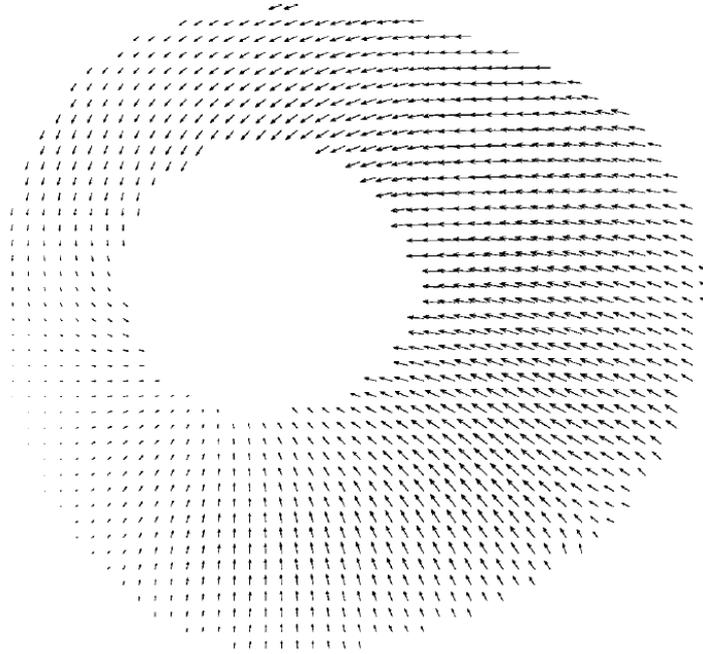


Figura 10: Matching fra le immagini 8(a)-(c)

è troppo elevato per richiedere al paziente di trattenere il respiro e, d'altro canto, non si possono usare tecniche di gating respiratorio, perché andrebbe così perduta la necessaria risoluzione temporale.

In [KH02] viene presentato un funzionale piuttosto complesso (simile a quello proposto nell'eq. 21), basato sempre su SSD, la cui ottimizzazione conduce alla registrazione simultanea di una sequenza di immagini PET del cuore rispetto ad un frame di riferimento.

Tramite la misura di somiglianza SAD in [SGSC95] è stata ottenuta la registrazione affine di immagini SPECT di un paziente rispetto ad un template, ottenuto da individui sani.

Il coefficiente di correlazione è stato impiegato per registrare rigidamente immagini PET dinamiche di un paziente rispetto ad un template [TDHC97], per registrare sequenze di immagini MR [GT01] e, ancora, per registrare immagini PET di emissione prese in tempi diversi, usando come perno le relative immagini di trasmissione [BDC⁺93].

La partitioned intensity uniformity (PIU) è stata messa a confronto con

Metodo	Trasf.	Modalità	S.	C.	Errore (mm)	Studio
SSD	Rigida	MR	I	L	3	[BV01]
SSD	Elastica	PET	I	F	(1.9, 2.4, 6.8)	[KH02]
SAD	Affine	SPECT	A	F	1.5	[SGSC95]
SAD	Rigida	SPECT	I	F	3.1 ± 1.7	[EKF+96]
SAD	Rigida	MR-SPECT	I	S	(0.5, 0.5, 1.1)	[HDH+93]
SAD	Rigida	CT-SPECT	I	F	2.5 ± 1.2	[DSHK99]
CC	Elastica	MR	I	S	(1.23, 3.25)	[GT01]
CC	Rigida	PET	I	S	1	[BDC+93]
CC	Rigida	PET	A	F	(1, 7, 1.7, 4.2)	[TDHC97]
MI	Rigida	MR	I	L	3.05	[CDLW01]

Tabella 2: Applicazioni di metodi SIB in letteratura [MCS+02]

S.	Soggetto	C.	Convalida
I	Intrapaziente	F	Fantoccio
A	Atlante	S	Disallineamento simulato
		L	Landmark

Tabella 3: Legenda

SAD nella registrazione multimodale CT-SPECT [DSHK99] e PET-SPECT [EKF+96]. Sorprendentemente, in entrambe i casi, gli errori di registrazione sono inferiori utilizzando SAD anziché PIU. In [DSHK99] vengono sottolineate, peraltro, le doti di robustezza della misura PIU.

Infine la mutua informazione è stata utilizzata in [SDP+03] per la registrazione affine multimodale PET-CT della regione toracico-addominale. Dopo aver segmentato le superfici dei polmoni in entrambe le modalità, lo schema proposto prevede un raffinamento della registrazione tramite metodi GFB, seguendo un modello di deformazione parametrico costituito da thin-plate spline con qualche centinaio di punti di controllo.

In [CDLW01] viene presentato uno studio comparativo fra le registrazioni di immagini MR effettuate tramite coefficiente di correlazione, PIU e mutua informazione: i risultati migliori si hanno utilizzando quest'ultima.

Nella tabella 7.2 si riassumono gli studi considerati, indicando la misura dell'errore come riportata negli articoli originali.

7.3 Metodi IFB

Data la loro recente introduzione, le applicazioni dei metodi IFB sono ancora scarse e perlopiù ridotte ai soli esperimenti di convalida eseguiti dagli ideatori

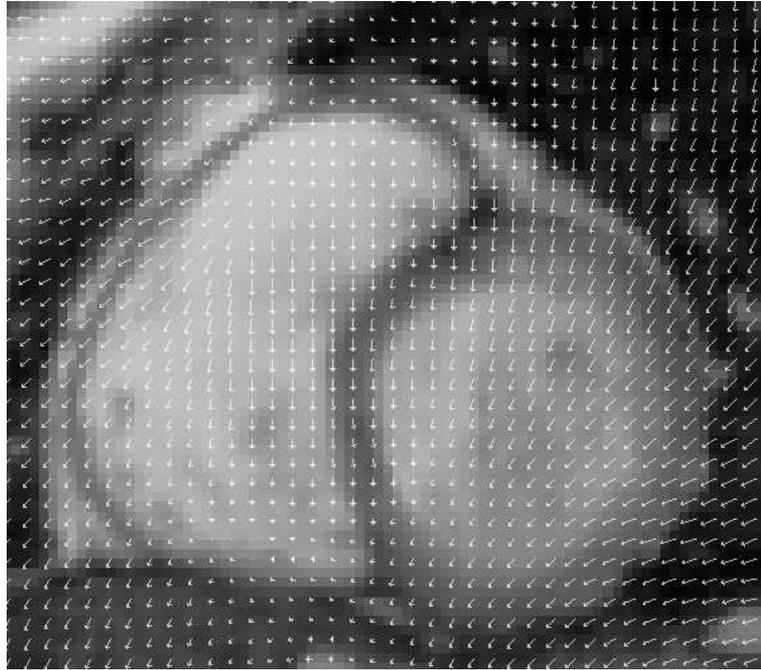


Figura 11: Matching fra le immagini delle figura 7 ottenuto mediante tecniche di flusso ottico.

delle varie procedure.

In particolare, in ambito cardiaco, l'algoritmo dei Demons si è dimostrato veloce ed affidabile nel registrare sequenze temporali di immagini CT di un cuore canino e di immagini SPECT del cuore umano [Thi95]. In quest'ultimo caso la sequenza consisteva di 8 immagini, ciascuna costituita da 64^3 voxel, rappresentanti l'intero ciclo cardiaco. La ciclicità del moto del cuore è stata considerata introducendo un'ulteriore iterazione che tenesse conto dell'intera sequenza. Inoltre, in base a considerazioni fisiche legate alla costanza dell'energia irradiata, è stato introdotto un fattore correttivo nelle equazioni del flusso ottico. Pur con questi raffinamenti, l'analisi dell'intera sequenza ha richiesto solo 10 minuti.

8 Conclusioni e sviluppi futuri

In questo scritto, dopo aver definito la registrazione come un problema di allineamento ottimale fra i punti delle immagini, è stata presentata una nomenclatura sufficientemente ricca da permettere una classificazione delle metodologie esistenti. Sono poi stati descritti in dettaglio gli attributi di *modello*

di deformazione e di base di registrazione. In particolare, per quanto riguarda il modello di deformazione - che individua la classe di deformazioni utilizzate per allineare le immagini- si è dato particolare risalto alle deformazioni libere con vincolo di regolarizzazione, per l'importanza assunta negli ultimi anni nei problemi di registrazione non rigida.

Le basi di registrazione, che determinano le caratteristiche delle immagini scelte come guida nel processo di registrazione, sono state suddivise in tre grandi famiglie che danno luogo a metodi geometric feature based, standard intensity based e iconic feature based. I primi si fondano sulla capacità di segmentare (non necessariamente preliminarmente) oggetti di interesse dalle immagini coinvolte, mentre i rimanenti necessitano di una conoscenza a priori sulla relazione fra le loro funzioni d'intensità. Si sottolinea peraltro che, utilizzando una formulazione variazionale, i vari metodi possono essere integrati con beneficio tra di loro.

Si considera poi il problema della registrazione simultanea di famiglie di immagini e, in particolar modo, due argomenti (l'analisi di una sequenza e la costruzione di un modello statistico) che ne fanno uso. Gli algoritmi proposti sono sufficientemente generali e possono essere istanziati scegliendo opportunamente, a seconda della natura delle immagini, una base e un modello di deformazione tra quelli descritti in precedenza.

Infine vengono presentate, ove disponibili, applicazioni in ambito cardiaco dei metodi proposti, corredate da estensivi riferimenti bibliografici e da esempi di matching fra immagini MRI del cuore.

Nella speranza di chi scrive, i metodi discussi dovrebbero rappresentare un punto di partenza per sperimentare varie strategie di registrazione e successiva fusione dei dati provenienti da varie risorse diagnostiche come previsto dal progetto SIMCAR; in particolare, è già in corso l'analisi di sequenze temporali di immagini MRI del cuore, fornite dall'Istituto di Fisiologia Clinica, con l'obiettivo di identificare un insieme di parametri morfo-funzionali dell'organo.

Bibliografia

- [ACC⁺98] A.A. Amini, Y. Chen, R.W. Curwen, V. Mani, and J. Su, *Coupled B-Snake grids and constrained thin plate splines for analysis of 2-D tissue deformations from tagged MRI*, IEEE Trans. Med. Imag. **17** (1998), no. 3, 344–356.
- [AD89] L. Axel and L. Dougherty, *MR imaging of motion with spatial modulation of magnetization*, Radiology **171** (1989), 841–845.

- [BDC⁺93] S.L. Bacharach, M.A. Douglas, R.E. Carson, P.J. Kalkowski, N.M. Freeman, P. Perrone, and R.O. Bonow, *Three-dimensional registration of cardiac positron emission tomography attenuation scans*, *Comp. Vision, Graph Image Process.* **34** (1993), no. 2, 311–321.
- [BLS03] S. Di Bona, L. Lutzemberg, and O. Salvetti, *A simulation model for analysing brain structure deformations*, *Physics in Medicine and Biology* **48** (2003), 4001–4022.
- [BM92] P.J. Besl and N.D. MacKay, *A method for registration of 3-D shapes*, *IEEE Transaction Pattern Anal. Mach. Intell.* **14** (1992), 239–256.
- [Bor84] G. Borgefors, *Distance transformations in arbitrary dimensions*, *Comput. Vision Graph. Image Processing* **27** (1984), 321–345.
- [BS02] S. Di Bona and O. Salvetti, *Neural method for three-dimensional image matching*, *Journal of Electronic Imaging* **11** (2002), no. 4, 497–506.
- [BV01] L.M. Bidaut and J.-P. Vallee, *Automated registration of dynamic MR images for the quantification of myocardial perfusion*, *J. Magn. Res. Imag.* **13** (2001), 648–655.
- [CA01] P. Cachier and N. Ayache, *Regularization in image non-rigid registration: I. Trade-off between smoothness and intensity similarity*, Tech. Report 4188, INRIA, 2001.
- [CC94] I. Cohen and L. Cohen, *Hyperquadric model for 2D and 3D data fitting*, 12th International Conference on Pattern recognition (ICPR '94) (Jerusalem), 1994, pp. 403–405.
- [CDLW01] A. Carrillo, J.L. Duerk, J.S. Lewin, and D.L. Wilson, *Semiautomatic 3-D image registration as applied to interventional MRI liver cancer treatment*, *IEEE Trans. Med. Imag.* **13** (2001), 175–185.
- [CJM97] G. E. Christensen, S.C. Joshi, and M.I. Miller, *Volumetric transformation of brain anatomy*, *IEEE transaction on Medical Imaging* **16** (1997), no. 6, 864–877.
- [Coh91] L.D. Cohen, *On active contours models and balloons*, *CVGIP: Imag. Under.* **53** (1991), no. 2, 211–218.

- [CPA99] P. Cachier, X. Pennec, and N. Ayache, *Fast non rigid matching by gradient descent: Study and improvements of the “demons” algorithm*, Tech. Report 3706, INRIA, 1999.
- [Del99] H. Delingette, *General object reconstruction based on simplex meshes*, International Journal of Computer Vision **32** (1999), no. 2, 111–146.
- [DFGB97] J. Declerck, J. Feldmar, M.L. Goris, and F. Betting, *Automatic registration and alignment on a template of cardiac stress and rest reoriented SPECT images*, IEEE Trans. Med. Imag. **16** (1997), 727–737.
- [DG96] M. Desbrun and M.-P. Gascuel, *Smoothed-Particles: A new paradigm for animating highly deformable bodies*, Eurographics Workshop on Animation and Simulation (Poitiers, France), September 1996, pp. 61–76.
- [doC76] M.P. doCarmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [DSHK99] D. Dey, P.J. Slomka, L.J. Hahn, and R. Kloiber, *Automatic three-dimensional multimodality registration using radionuclide transmission CT attenuation maps: a phantom study*, J. Nucl. Med. **40** (1999), no. 3, 448–455.
- [EKF⁺96] S. Eberl, I. Kanno, R.R. Fulton, A. Ryan, B.F. Hutton, and M.J. Fulham, *Automated interstudy image registration technique for SPECT and PET*, J. Nucl. Med. **37** (1996), no. 1, 137–145.
- [FDMA97] J. Feldmar, J. Declerck, G. Malandain, and N. Ayache, *Extension of the ICP algorithm to nonrigid intensity-based registration of 3D volumes*, Comp. Vision and Image Understanding **66** (1997), no. 2, 193–206.
- [FHM00] J. M. Fitzpatrick, D.L.G Hill, and C.R. Maurer, *Handbook of medical imaging*, vol. 2, ch. 8. Image Registration, SPIE press, 2000.
- [FRN01] A. F. Frangi, D. Rueckert, and J. A. Schnabel W. J. Niesen, *Automatic 3D ASM construction via atlas-based landmarking and volumetric elastic registration*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 2082, pp. 78–91, Springer Verlag, 2001.

- [FSPC91] T.L. Faber, E.M. Stokely, R.M. Peshock, and J.R. Corbett, *A model-based four-dimensional left ventricular surface detector*, IEEE Tran. Med. Imag. **10** (1991), 321–329.
- [GMJP99] A. Guimond, J. Meunier, and J.-P. Thirion, *Average brain models: A convergence study*, Tech. Report 3731, INRIA, 1999.
- [GT01] C.M. Gallippi and G.E. Trahey, *Automatic image registration for MR and ultrasound cardiac images*, Information Processing in Medical Imaging IPMI '01 (UCDavis, California) (M.F. Insana and R.M. Leahy, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 2082, Springer, 2001, pp. 141–147.
- [HDH⁺93] C.K. Hoh, M. Dahlbom, G. Harris, Y. Choi, R.A. Hawkins, M.E. Philips, and J. Maddhai, *Automated iterative three-dimensional registration of positron emission tomography images*, J. Nucl. Med. **34** (1993), no. 11, 2009–2018.
- [KH02] G.J. Klein and R.H. Huesman, *Four-dimensional processing of deformable cardiac PET data*, Med. Image Anal. **6** (2002), 29–46.
- [KWT88] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos, *Snakes: Active contour models*, IJCV **1** (1988), 321–331.
- [Lom96] J.-C. Lombardo, *Modélisation d'objets déformables avec un système de particules orientées*, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.
- [MCS⁺02] T. Makela, P. Clarysse, O. Sipila, N. Pauna, Q.C. Pham, T. Kattila, and I.E. Magnin, *A review of cardiac image registration methods*, IEEE Trans. Med. Imag. **21** (2002), no. 9, 1011–1021.
- [MD97] J. Montagnat and H. Delingette, *A hybrid framework for surface registration and deformable models*, Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR'97 (San Juan, Puerto Rico), June 1997, pp. 1041–1046.
- [MDSA00] J. Montagnat, H. Delingette, N. Scarpel, and N. Ayache, *Representations, shape, topology and evolution of deformable surfaces. application to 3D medical image segmentation*, Tech. Report 3954, INRIA, 2000.
- [MV98] J.B. Mainz and M.A. Viergever, *A survey on medical image registration*, Med. Image Anal. **2** (1998), no. 3, 1–36.

- [PAT00] X. Pennec, N. Ayache, and J.P. Thirion, *Handbook of medical imaging: processing and analysis*, ch. Landmark-based registration using features identified through differential geometry, pp. 499–513, Academic press, 2000.
- [PCSW89] C.A. Pellizzari, G.T.Y Chen, D.R. Spelbring, and R.R Weichselbaum, *Accurate three dimensional registration of CT, PET and MR images of the brain*, J. Comput. Assist. Tomogr. **13** (1989), 20–26.
- [PMA95] J. Park, D. Metaxas, and L. Axel, *Volumetric deformable models with parameter functions: a new approach to the 3D motion analysis of the LV from MRI-SPAMM*, Fifth International Conference on Computer Vision, 1995, pp. 700–705.
- [RMA99] A. Roche, G. Malandain, and N. Ayache, *Unifying maximum likelihood approaches in medical image registration*, Tech. Report 3741, INRIA, 1999.
- [RMAP98] A. Roche, G. Malandain, N. Ayache, and X. Pennec, *The correlation ratio as a new similarity measure for multimodal image registration*, Proceedings MICCAI- LNCS **1496** (1998), 1115–1124.
- [SDP+03] P.J. Slomka, D. Dey, P. Przetak, U.E. Aladl, and R.P. Baum, *Automated 3-dimensional registration of stand-alone ^{18}F -FDG whole-body PET with CT*, J. Nucl. Med **44** (2003), 1156–1167.
- [Set96] J. Sethian, *Level set methods: Evolving interfaces in geometry, fluid mechanics, computer vision and material science*, Cambridge University Press, 1996.
- [SGSC95] P.J. Slomka, A.H. Gilbert, J. Stephenson, and T. Cradduc, *Automated alignment and sizing of myocardial stress and rest scans to three dimensional normal templates using an image registration algorithm*, J. Nuclear Med. **36** (1995), 1115–1122.
- [SSC+95] S. Sinha, U. Sinha, J. Czernin, G. Porenta, and H.R. Schelbert, *Non-invasive assesment of myocardial perfusion and metabolism: Feasibility of registering gated MR and PET images*, Amer. J. Roentgenol. **36** (1995), 301–307.
- [SSCD99] P. Shi, A.J. Sinusas, R. Todd Constable, and J.S. Duncan, *Volumetric deformation analysis using mechanics-based data fusion:*

- applications in cardiac motion recovery*, IJCV **35** (1999), no. 1, 87–107.
- [TDHC97] T.G. Turkington, T.R. DeGrado, M.W. Hanson, and R.E. Coleman, *Alignment of dynamic cardiac PET images for correction of motion*, IEEE Trans. Nucl. Sci. **44** (1997), 235–242.
- [Thi95] J-P. Thirion, *Fast non rigid matching of 3D medical images*, Tech. Report 2547, INRIA, 1995.
- [TKW88] D. Terzopoulos, M. Kass, and A. Witkin, *Constraints on deformable models: Recovering 3D shapes and non-rigid motion*, Artificial Intelligence **36** (1988), no. 1, 91–123.
- [TM91] D. Terzopoulos and D. Metaxas, *Dynamic 3D models with local and global deformations: Deformable superquadrics.*, IEEE PAMI **13** (1991), no. 7, 703–714.
- [VT92] M. Vasilescu and D. Terzopoulos, *Adaptive meshes and shells*, International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR '92) (Champaign, Illinois), June 1992, pp. 829–832.
- [WMC93] R.P. Woods, J.C. Mazziotta, and S.R. Cherry, *MRI-PET registration with automated algorithm*, J. Comput. Assist. Tomogr. **17** (1993), 536–546.
- [XP98] C. Xu and J.L. Prince, *Snakes, shapes and gradient vector flow*, IEEE Trans. Imag. Proc. **7** (1998), no. 3, 359–369.
- [XPP00] C. Xu, D.L. Pham, and J.L. Prince, *Handbook of medical imaging*, vol. 2, ch. 3. Image Segmentation using deformable models, SPIE press, 2000.
- [YAD⁺93] A.A. Young, L. Axel, L. Dougherty, D. Bogen, and C. Parenteau, *Validation of MRI tagging to estimate material deformation*, Radiology **188** (1993), 101–108.
- [YKDA95] A.A. Young, D.L. Kraitchman, L. Dougherty, and L. Axel, *Tracking and finite element analysis of stripe deformation in magnetic resonance tagging*, IEEE Trans. Med. Imag. **14** (1995), no. 3, 413–421.

- [YSS04] Y. Zhai Y. Sheikh and M. Shah, *An accumulative framework for the alignment of an image sequence*, Asian Conference on Computer Vision (ACCV 2004), January 2004.