

Consiglio Nazionale delle Ricerche

**ISTITUTO DI ELABORAZIONE
DELLA INFORMAZIONE**

PISA

USO DELLA FOTOGRAMMETRIA DIGITALE NELLA
RESTITUZIONE DI MODELLI TRIDIMENSIONALI

B. BIAGI, R. BACCELI, S. PETRUCCELLI

NOTA INTERNA B4-09

MARZO 1987

INTRODUZIONE

In questi ultimi dieci anni si e' assistito ad una enorme proliferazione delle applicazioni in cui gli elaboratori elettronici si sono rivelati strumenti utili a velocizzare processi, ridurre possibilita' di errori ed aumentare la capacita' umana in moltissimi settori della scienza e della tecnologia.

Anche il campo dell'ingegneria e dell'architettura ha trovato nell'elaboratore elettronico un valido aiuto, oltre che per la memorizzazione ed il calcolo di dati, anche per la progettazione e la elaborazione di disegni tecnici con il Computer Aided Design, per la produzione di cartografia di sintesi con i sistemi informativi geografici, per il calcolo di strutture con le sofisticate procedure di analisi statica e dinamica e cosi' via. Altrettanto utile, e forse ancor piu' indispensabile, e' il calcolatore elettronico nella gestione dei dati inviati dai satelliti e per la elaborazione delle relative enormi quantita' di immagini.

Sono rimaste tutt'oggi non del tutto esplorate le applicazioni che richiedono metodologie di calcolo proprie sia della elaborazione di immagini che della computer graphics, sia a causa di una separazione "storica" tra i due settori, che per altro tende sempre piu' a scomparire, sia perche' solo recentemente e' stato possibile avere a disposizione dell'hardware dai costi accessibili che integrasse in maniera efficiente le periferiche ed il software necessario per tali operazioni.

Lo scopo di questo studio e' quello di descrivere un sistema per

la restituzione di elementi architettonici rilevati con le metodologie della stereofotogrammetria.

Topografi, architetti ed ingegneri eseguono i rilevamenti degli edifici, monumenti e manufatti in genere con fotocamere dalla focale calibrata in modo molto preciso, eseguendo due o piu' riprese da posizioni diverse, delle quali misurano tutti i parametri posizionali ed angolari e ricostruiscono i disegni nelle varie viste (ricavando quindi le informazioni tridimensionali dell'oggetto) con uno stereo-restitutore. La prima fase di rilevamento non trae praticamente nessun vantaggio dal sistema proposto, almeno allo stadio attuale, per due motivi: l'idea piu' attraente (e conveniente) sarebbe quella di effettuare il rilevamento anziche' con fotocamere, con telecamere in grado di fornire immagini digitali; la tecnologia attuale non permette di soddisfare ai requisiti di precisione richiesta nella misura dei parametri di ripresa e quindi la fotocamera rimane il dispositivo da preferire, anche se la successiva fase di digitalizzazione delle lastre fotografiche e' un procedimento abbastanza delicato; il secondo motivo riguarda invece una opportunita' pratica relativa alla quantita' enorme di lavoro gia' fatto su lastre fotografiche, per cui aggiornare il lavoro implicherebbe ripetere il rilevamento con le telecamere.

La seconda e la terza fase, cioe' la restituzione di coordinate tridimensionali e la costruzione nelle varie viste, invece, potrebbero essere estremamente semplificate.

Il sistema descritto prevede che le coppie stereoscopiche di lastre fotografiche vengano opportunamente digitalizzate. In una seconda fase, allo stato attuale interattiva e non automatica,

l'operatore seleziona i punti caratteristici dell'oggetto rilevato che vuole restituire e indica quelle linee dell'oggetto che egli ritiene utili nella restituzione, come se dovesse comporre un disegno. Nella terza e ultima fase, una serie di procedure calcoleranno le coordinate 3-D dei punti e delle linee marcati sulle immagini e che, attraverso un'opportuna interfaccia software, saranno passate ad un comune package di Computer Aided Design; in questo modo sarà possibile sia la restituzione grafica a qualsiasi scala, con viste assonometriche, prospettiche ecc. sia l'editing per l'aggiunta di particolari, correzioni ecc..

Le prime due fasi del sistema riguardano quindi tecniche di elaborazione di immagini, mentre l'ultima riguarda tecniche di grafica.

Le procedure sono state implementate in linguaggio "C" sotto sistema operativo MS-DOS su un personal computer AT-IBM dotato di opportuno hardware grafico, presso l'Istituto di Elaborazione dell'Informazione del CNR di Pisa.

1. RICOSTRUZIONE DEL MODELLO DI UN OGGETTO DA DUE FOTOGRAMMI STEREOSCOPICI

La ricostruzione di un modello tridimensionale di un oggetto mediante un unico fotogramma e' possibile solo se si tratta di un oggetto piano; in questo caso e' individuabile una corrispondenza biunivoca tra i punti immagine ed i punti oggetto.

Il caso piu' comune riguarda oggetti in 3-D ed in tal caso viene a mancare la corrispondenza biunivoca tra punti immagine e punti oggetto, potendo corrispondere ad una stessa posizione sull'immagine due o piu' punti dell'oggetto. La ricostruzione dell'oggetto puo' avvenire in tal caso se si hanno a disposizione due fotogrammi stereoscopici, ovvero fotogrammi che ritraggono lo stesso oggetto da due punti di vista diversi.[3][4]

Come si vede dalla figura 1, all'atto della presa dei fotogrammi si formano due prospettive diverse e si viene a stabilire una corrispondenza biunivoca tra ogni punto dell'oggetto e le due immagini sui fotogrammi; e' escluso in tal caso che due punti dell'oggetto possano dare immagini nelle stesse posizioni sui fotogrammi.

L'operazione inversa della presa si puo' brevemente chiamare restituzione. Con questa operazione si ricostruisce, per ogni punto dell'immagine, la corrispondente posizione 3-D dell'oggetto, ovvero si ricostruisce un modello che si puo' definire come il luogo dei punti di intersezione dei raggi omologhi proiettanti.

1.1 IMPIEGO DELLE IMMAGINI DIGITALI NELLA FOTOGRAMMETRIA DEI VICINI

La digitalizzazione dei fotogrammi cambia radicalmente le attuali metodologie di restituzione, tanto che si puo' parlare di restituzione digitale, in alternativa a quella analitica. [30]

Il procedimento proposto e' caratterizzato da due fasi:

- in una prima fase verranno esaminati i fotogrammi digitalizzati, per l'individuazione dei punti omologhi da correlare e per indicare tutte le linee dell'oggetto ritratto aventi come vertici i punti scelti;
- nella seconda fase, tutte le informazioni raccolte (linee e punti 3-D) concorreranno nella definizione del modello di rappresentazione dell'oggetto, modello che sara' completato ed utilizzato secondo gli scopi prefissati.

Tale diversita' metodologica dipende sia dalle differenti tecnologie impiegate (non piu' uno stereocomparatore dotato di un visore stereoscopico, bensì un monitor), sia dalla necessita' di disporre di un modello di rappresentazione dell'oggetto ritratto (per esempio un edificio o un monumento) tale da consentire elaborazioni grafiche, compresa la restituzione, mediante procedure di Computer Aided Design.[17]

2. RESTITUZIONE DI COORDINATE 3-D DA COPPIE DI PUNTI IMMAGINE: TEORIA E ALGORITMI

Le immagini fotografiche costituiscono una visione prospettica dell'oggetto ripreso. Usando la geometria su cui si basa la computer graphics, si puo' arrivare ad esprimere la scena fotografata in termini strettamente matematici.[15][16][18]

Si calcolano, infatti, le trasformazioni "ideali" applicate all'oggetto per ottenere ognuna delle immagini stereo. L'insieme di tutte queste trasformazioni e' rappresentato da una matrice.

In seguito verranno illustrati due metodi per la ricostruzione delle coordinate 3-D, ognuno dei quali e' definibile se e solo se si conoscono dati opportuni.

2.1 Ricostruzione delle coordinate 3-D

Verranno illustrati due metodi per la ricostruzione di un oggetto nello spazio partendo da due sue proiezioni prospettiche. Chiaramente la ricostruzione e' possibile anche disponendo di altri tipi di proiezioni.

Ricordando che una trasformazione prospettica generale puo' essere rappresentata con una matrice 4x4, si ha :

$$[x \ y \ z \ 1] T' = [X \ Y \ Z \ H] \quad (2.1) \quad \text{dove}$$

$$T' = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} & T'_{14} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} & T'_{24} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} & T'_{34} \\ T'_{41} & T'_{42} & T'_{43} & T'_{44} \end{bmatrix}$$

Il risultato della (2.1) puo' essere proiettato su un piano bidimensionale, diciamo $z=0$, usando la seguente matrice

$$T'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La concatenazione delle due matrici genera:

$$T = T'T'' = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & 0 & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & 0 & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & 0 & T_{44} \end{bmatrix}$$

Scrivendo per esteso la trasformazione :

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & 0 & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & 0 & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & 0 & T_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y & Z & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Da notare che x^* e y^* sono le coordinate nella proiezione prospettica sul piano $z=0$. Si potrebbe realizzare la stessa procedura usando proiezioni sul piano $x=0$ o $y=0$.

Scrivendo per esteso l'equazione (2.2):

$$T_{11}x + T_{21}y + T_{31}z + T_{41} = Hx^* = X \quad (2.3a)$$

$$T_{12}x + T_{22}y + T_{32}z + T_{42} = Hy^* = Y \quad (2.3b)$$

$$T_{14}x + T_{24}y + T_{34}z + T_{44} = H \quad (2.3c)$$

Ricavando H dalla (2.3c) e sostituendo in (2.3a) e in (2.3b):

$$(T_{11} - T_{14}x^*)x + (T_{21} - T_{24}x^*)y + (T_{31} - T_{34}x^*)z + (T_{41} - T_{44}x^*) = 0$$

$$(T_{11} - T_{14}y^*)x + (T_{21} - T_{24}y^*)y + (T_{31} - T_{34}y^*)z + (T_{41} - T_{44}y^*) = 0 \quad (2.4)$$

Questa coppia di equazioni puo' essere considerata in modi differenti. Si possono assumere note sia T che (x,y,z) , cioe' le coordinate spaziali del punto; in questo caso ci sono 2 incognite x^* e y^* . Queste rappresentano le coordinate del punto nella proiezione prospettica. Questo e' l'approccio illustrato negli esempi precedenti.

Alternativamente si possono considerare note T , x^* e y^* e cercare le incognite (x,y,z) . Poiche' le incognite sono 3 e le equazioni sono 2, il sistema (2.4) non potrebbe essere risolto; tale ostacolo puo' essere superato con l'ausilio di due foto o, in ogni caso, di due proiezioni diverse dello stesso oggetto.

Si puo' riscrivere il sistema precedente considerando prima le coordinate (x^*,y^*) di una proiezione, con la relativa matrice T' , e poi le coordinate (x'',y'') dell'altra proiezione, con la corrispondente matrice T'' .

Le 4 equazioni risultanti possono essere riscritte in forma matriciale ponendo

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

dove

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}' - T_{14}'x^* & T_{21}' - T_{24}'x^* & T_{31}' - T_{34}'x^* \\ T_{12}' - T_{14}'y^* & T_{22}' - T_{24}'y^* & T_{32}' - T_{34}'y^* \\ T_{11}'' - T_{14}''x'' & T_{21}'' - T_{24}''x'' & T_{31}'' - T_{34}''x'' \\ T_{12}'' - T_{14}''y'' & T_{22}'' - T_{24}''y'' & T_{32}'' - T_{34}''y'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{44}'x^* - T_{41}' \\ T_{44}'y^* - T_{42}' \\ T_{44}''x'' - T_{41}'' \\ T_{44}''y'' - T_{42}'' \end{bmatrix}$$

Il sistema (2.5) consiste di 4 equazioni e 3 incognite, (x,y,z) .

Per risolverlo si adotta la tecnica seguente:

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$$

dove $\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}$ e' quadrata e di dimensioni corrette per $\begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$.

Da cio' si ricava

$$\begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$$

Un terzo modo di considerare le (2.4) consiste di supporre note le coordinate di un certo numero di punti nello spazio 3-D, cioe' nello spazio oggetto, e nella proiezione prospettica. In questo caso e' possibile determinare gli elementi T_{ij} della matrice di trasformazione, che poi possono essere usati per calcolare le coordinate 3-D dei punti non noti.

Per far cio' riscriviamo la (2.4):

$$\begin{aligned} T_{11}x + T_{21}y + T_{31}z + T_{41} - T_{14}x^* - T_{24}y^* - T_{34}z^* - T_{44}x^* &= 0 \\ T_{12}x + T_{22}y + T_{32}z + T_{42} - T_{14}xy^* - T_{24}yy^* - T_{34}zy^* - T_{44}y^* &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Supponendo noti i punti x^* , y^* , x , y e z , nella (2.6) le incognite sono 12. Se si considerano 6 punti non coplanari nello spazio oggetto, si ottengono 12 equazioni in 12 incognite, che possono essere risolte nei T_{ij} . Così si riesce a definire la matrice di trasformazione, sulla quale non e' richiesta nessuna conoscenza a priori.

In forma matriciale il sistema di equazioni puo' essere scritto così:

$$\begin{bmatrix}
 x1 & 0 & -x1x*1 & y1 & 0 & -y1x*1 & z1 & 0 & -z1x*1 & 1 & 0 & x*1 \\
 0 & x1 & -x1y*1 & 0 & y1 & -y1y*1 & 0 & z1 & -z1y*1 & 0 & 1 & y*1 \\
 x2 & 0 & -x2x*2 & y2 & 0 & -y2x*2 & z2 & 0 & -z2x*2 & 1 & 0 & x*2 \\
 0 & x2 & -x2y*2 & 0 & y2 & -y2y*2 & 0 & z2 & -z2y*2 & 0 & 1 & y*2 \\
 x3 & 0 & -x3x*3 & y3 & 0 & -y3x*3 & z3 & 0 & -z3x*3 & 1 & 0 & x*3 \\
 0 & x3 & -x3y*3 & 0 & y3 & -y3y*3 & 0 & z3 & -z3y*3 & 0 & 1 & y*3 \\
 x4 & 0 & -x4x*4 & y4 & 0 & -y4x*4 & z4 & 0 & -z4x*4 & 1 & 0 & x*4 \\
 0 & x4 & -x4y*4 & 0 & y4 & -y4y*4 & 0 & z4 & -z4y*4 & 0 & 1 & y*4 \\
 x5 & 0 & -x5x*5 & y5 & 0 & -y5x*5 & z5 & 0 & -z5x*5 & 1 & 0 & x*5 \\
 0 & x5 & -x5y*5 & 0 & y5 & -y5y*5 & 0 & z5 & -z5y*5 & 0 & 1 & y*5 \\
 x6 & 0 & -x6x*6 & y6 & 0 & -y6x*6 & z6 & 0 & -z6x*6 & 1 & 0 & x*6 \\
 0 & x6 & -x6y*6 & 0 & y6 & -y6y*6 & 0 & z6 & -z6y*6 & 0 & 1 & y*6
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T11 \\
 T12 \\
 T14 \\
 T21 \\
 T22 \\
 T24 \\
 T31 \\
 T32 \\
 T34 \\
 T41 \\
 T42 \\
 T44
 \end{bmatrix}
 = 0 \quad (2.7)$$

che scritto in forma piu' compatta diventa

$$A'T=0$$

Poiche' le equazioni (2.7) sono omogenee, conterranno un fattore arbitrario; quindi T44 puo', per esempio, essere definito =1 e la trasformazione ottenuta risultare, cosi', normalizzata.

Quindi le equazioni in totale possono essere ridotte a 11, usando 5 punti e 1/2. Se la trasformazione e' normalizzata, l'ultima colonna in A' puo' essere portata al membro destro della uguaglianza cambiando il segno, ottenendo cosi', un sistema non omogeneo. Ponendo T44=1, la matrice ottenuta non e' la matrice T cercata, ma una matrice Tn, che e' la T normalizzata, cioe'

$$Tn = 1/T44 * T.$$

E' ovvio che quando si utilizzerà la Tn, bisognerà tenere conto di cio'.

2.2 Ricostruzione di un modello 3-D da una coppia stereo con l'uso di coordinate omogenee

Lo scopo da raggiungere e' quello di trovare le coordinate reali di un oggetto nel sistema di riferimento arbitrario T.XYZ.

Si e' visto che esistono vari modi di interpretare le equazioni

(2.6) ed a noi ne interessano esattamente due :

- 1° metodo, (nel seguito "metodo dei parametri"), in cui si considerano incognite le coordinate (x,y,z) del punto nello spazio oggetto, note le due matrici di trasformazione e le coordinate x^*1,y^*1 e x^*2,y^*2 del punto su ciascuna delle due foto;

- 2° metodo, (nel seguito "metodo dei punti d'appoggio"), in cui si considerano incogniti gli elementi delle matrici di trasformazione, note le coordinate, sia nel mondo oggetto che sulle due foto, di 6 punti del mondo oggetto non coplanari.

Metodo dei parametri

Bisognerà prima di tutto determinare gli elementi delle due matrici di trasformazione $T1$ e $T2$, utilizzando :

- i parametri dell'orientamento esterno delle due camere, costituiti, come abbiamo visto, dalle coordinate dei centri di proiezione rispetto al sistema $T.XYZ$ ($(Xc1,Yc1,Zc1)$ per la prima camera e $(Xc2,Yc2,Zc2)$ per la seconda) e dagli angoli della rotazione primaria, secondaria e terziaria (rispettivamente $\alpha_1, \beta_1, \Gamma_1$ e $\alpha_2, \beta_2, \Gamma_2$);
- i parametri dell'orientamento interno delle camere, costituito unicamente dalla distanza principale (rispettivamente $p1$ e $p2$), in quanto ipotizziamo che le camere siano state tarate e che quindi il piede della perpendicolare abbassata dal centro ottico sul piano principale coincida con l'origine del sistema di riferimento sulla lastra (rispettivamente $O1.xy$ e $O2.xy$).

Lo schema del metodo dei parametri è dato in figura 2, dove

negli ovali sono scritti nomi di files contenenti dati, mentre nei rettangoli sono scritti nomi di algoritmi che ora verranno illustrati.

CALCOLA MATRICI DI TRASFORMAZIONE:

per ogni i-esima camera (i=1 o i=2) il programma C.M.T. effettua la seguente sequenza di moltiplicazioni matriciali :

$$T_t * TR_p * TR_s * TR_t * T_{t-1} * T_{t1} * T_p$$

dove

$$T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -X_{ci} & -Y_{ci} & -Z_{ci} & 1 \end{bmatrix}$$

TR_p = matrice che effettua una rotazione primaria di un angolo -β_i

TR_s = matrice che effettua una rotazione secondaria di un angolo -α_i

TR_t = matrice che effettua una rotazione terziaria di un angolo -γ_i

T_{t-1} = matrice inversa di T_t;

$$T_{t1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -X_{ci} & -Y_{ci} & -Z_{ci} + p_i & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'idea su cui si basa questo algoritmo e' che l'immagine ottenuta con una camera che ha subito degli spostamenti e delle rotazioni nello spazio e' uguale a quella che si otterrebbe lasciando la camera in posizione normale facendo poi subire al mondo oggetto le rotazioni e traslazioni inverse a quelli della camera.

La posizione normale puo' essere quella di porre il centro ottico in modo da avere l'immagine risultante su un piano di comodo; inoltre si puo' imporre di lavorare direttamente sull'immagine positiva piuttosto che su quella negativa, poiche' e' proprio su tale immagine che l'operatore marchera' i punti omologhi da correlare. Quindi la Tt posiziona il centro ottico nell'origine del sistema T.XYZ, vengono effettuate le tre rotazioni con gli angoli cambiati di segno, si ritorna nella posizione originaria nello spazio con Tt-1, con Tt1 si trasla il centro ottico nel punto di coordinate (0,0,-p) nel sistema T.XYZ e si proietta con Tp sul piano z=0 con centro di proiezione coincidente con il centro ottico della camera (ottenendo cosi' le immagini al positivo).

CALCOLA PUNTI OGGETTO

Come visto prima, il sistema da risolvere e' $AX=B$, che viene posto nella forma seguente

$$X = \left[\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

dove $X=[x \ y \ z]$.

Cio' puo' essere realizzato con un programma che ha per input le due matrici di trasformazione calcolate con Calcola Matrici di Trasformazione e per ogni coppia di punti omologhi applica la

(2.8) e restituisce le coordinate spaziali del punto oggetto (vedi figura 2).

Da notare che in questo modo l'orientamento relativo delle due camere viene realizzato automaticamente, in quanto le matrici di trasformazione calcolate con C.M.T. inglobano tutte le informazioni utili a tale scopo utilizzando tutti i parametri dell'orientamento interno ed esterno delle due camere registrati al momento della presa fotografica.

Metodo dei punti d'appoggio

Lo schema di tale metodo e' illustrato in figura 3, dove i rettangoli rappresentano algoritmi.

RICOSTRUISCI MATRICI DI TRASFORMAZIONE NORMALIZZATE:

per determinare la matrice di trasformazione relativa ad una camera, si prende l'immagine da essa prodotta e vengono rilevate le coordinate dei 6 punti d'appoggio (x^*1, y^*1) , (x^*2, y^*2) , etc.

A questo punto viene risolto il sistema (2.7) cosi' modificato :

$$\begin{bmatrix}
 x1 & 0 & -x1x^*1 & y1 & 0 & -y1x^*1 & z1 & 0 & -z1x^*1 & 1 & 0 \\
 0 & x1 & -x1y^*1 & 0 & y1 & -y1y^*1 & 0 & z1 & -z1y^*1 & 0 & 1 \\
 x2 & 0 & -x2x^*2 & y2 & 0 & -y2x^*2 & z2 & 0 & -z2x^*2 & 1 & 0 \\
 0 & x2 & -x2y^*2 & 0 & y2 & -y2y^*2 & 0 & z2 & -z2y^*2 & 0 & 1 \\
 x3 & 0 & -x3x^*3 & y3 & 0 & -y3x^*3 & z3 & 0 & -z3x^*3 & 1 & 0 \\
 0 & x3 & -x3y^*3 & 0 & y3 & -y3y^*3 & 0 & z3 & -z3y^*3 & 0 & 1 \\
 x4 & 0 & -x4x^*4 & y4 & 0 & -y4x^*4 & z4 & 0 & -z4x^*4 & 1 & 0 \\
 0 & x4 & -x4y^*4 & 0 & y4 & -y4y^*4 & 0 & z4 & -z4y^*4 & 0 & 1 \\
 x5 & 0 & -x5x^*5 & y5 & 0 & -y5x^*5 & z5 & 0 & -z5x^*5 & 1 & 0 \\
 0 & x5 & -x5y^*5 & 0 & y5 & -y5y^*5 & 0 & z5 & -z5y^*5 & 0 & 1 \\
 x6 & 0 & -x6x^*6 & y6 & 0 & -y6x^*6 & z6 & 0 & -z6x^*6 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 t11 \\
 t12 \\
 t14 \\
 t21 \\
 t22 \\
 t24 \\
 t31 \\
 t32 \\
 t34 \\
 t41 \\
 t42
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 x^*1 \\
 y^*1 \\
 x^*2 \\
 y^*2 \\
 x^*3 \\
 y^*3 \\
 x^*4 \\
 y^*4 \\
 x^*5 \\
 y^*5 \\
 x^*6
 \end{bmatrix}$$

dove $(x1, y1, z1), (x2, y2, z2)$, etc. sono le coordinate mondo dei 6 punti d'appoggio. Il risultato sara' la matrice

$$T_n = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & 0 & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & 0 & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

In questo modo si ottengono le due matrici di trasformazione normalizzate; si realizza, così, l'orientamento relativo tra le due camere, utilizzando 6 punti d'appoggio fotografici, come nella restituzione analitica di fotogrammi aerei vista nel capitolo 1.

CALCOLA PUNTI OGGETTO 1:

si è visto che, supposte note nello spazio oggetto le coordinate di 6 punti non coplanari, si arriva al sistema (2.7) che può essere risolto per conoscere gli elementi di una matrice di trasformazione T; in realtà si otterra', per i motivi esposti prima, una matrice $T_n = 1/T_{44} * T$ data dalla (2.9).

Ora $[x \ y \ z \ 1] * T = [H_x * 1 \ H_y * 1 \ 0 \ H]$ implica

$$[x \ y \ z \ 1] * T_{44} / T_{44} * T = [H_x * 1 \ H_y * 1 \ 0 \ H] \quad \text{da cui}$$

$$T_{44} * [x \ y \ z \ 1] * T_n = [H_x * 1 \ H_y * 1 \ 0 \ H] \quad \text{e quindi}$$

$$T_{44} (x t_{11} + y t_{21} + z t_{31} + t_{41}) = H_x * 1 \quad (2.10)$$

$$T_{44} (x t_{12} + y t_{22} + z t_{32} + t_{42}) = H_y * 1 \quad (2.11)$$

$$T_{44} (x t_{14} + y t_{24} + z t_{34} + 1) = H \quad (2.12)$$

Sostituendo la (2.12) in (2.10) e (2.11) e raggruppando, si ottiene:

$$T_{44} [x(t_{11}-t_{14}x*1) + y(t_{21}-t_{24}x*1) + z(t_{31}-t_{34}x*1) + (t_{41}-x*1)] = 0 \quad (2.13)$$

$$T_{44} [x(t_{12}-t_{14}y*1) + y(t_{22}-t_{24}y*1) + z(t_{32}-t_{34}y*1) + (t_{42}-y*1)] = 0 \quad (2.14)$$

che possono essere semplificate dividendo per T_{44} , ottenendo due equazioni per tre incognite (x,y,z) ; quindi basta considerare l'ascissa del punto omologo di (x^*1,y^*1) nella foto 2, per ottenere l'equazione mancante.

In conclusione, per ottenere le coordinate 3-D di un punto oggetto F , basta avere le coordinate (x^*1,y^*1) dell'immagine di F sul fotogramma 1, la coordinata x^*2 dell'immagine di F sul fotogramma 2, date le matrici

$$T_{n1} = \begin{bmatrix} t_{11}' & t_{12}' & 0 & t_{14}' \\ t_{21}' & t_{22}' & 0 & t_{24}' \\ t_{31}' & t_{32}' & 0 & t_{34}' \\ t_{41}' & t_{42}' & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{n2} = \begin{bmatrix} t_{11}'' & t_{12}'' & 0 & t_{14}'' \\ t_{21}'' & t_{22}'' & 0 & t_{24}'' \\ t_{31}'' & t_{32}'' & 0 & t_{34}'' \\ t_{41}'' & t_{42}'' & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

per risolvere il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} t_{11}' - t_{14}'x^*1 & t_{21}' - t_{24}'x^*1 & t_{31}' - t_{34}'x^*1 \\ t_{12}' - t_{14}'y^*1 & t_{22}' - t_{24}'y^*1 & t_{32}' - t_{34}'y^*1 \\ t_{11}'' - t_{14}''x^*2 & t_{21}'' - t_{24}''x^*2 & t_{31}'' - t_{34}''x^*2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^*1 - t_{41}' \\ y^*1 - t_{42}' \\ x^*2 - t_{41}'' \end{bmatrix}$$

3. STRUTTURE DATI PER LA RAPPRESENTAZIONE DEL MODELLO 3-D

Il risultato dei metodi di restituzione descritti precedentemente e' costituito da un insieme di coordinate tridimensionali dell'oggetto reale. Per ogni coppia stereo viene prodotto un insieme di punti.

Disponendo di un sistema CAD (Computer Aided Design), si possono facilmente, ed in maniera veloce, generare disegni del modello ricostruito. Se tale sistema e' molto potente, oltre alle normali assonometrie e proiezioni ortogonali, si possono ottenere anche proiezioni prospettiche, in cui il punto di vista e' scelto dall'operatore.[18][20]

Da notare che si puo' rendere l'oggetto "trasparente" disegnandone le linee nascoste e, se il sistema CAD lo permette, passare ad eventuali visualizzazioni reali con comandi di sistema per la rimozione di tali linee e/o di superfici nascoste.

Perche' cio' sia possibile e' necessario fornire al sistema una descrizione dell'oggetto da disegnare.

Esistono vari modi per rappresentare in 3-D un oggetto che poi deve essere visualizzato su un display grafico.

In certi casi si e' obbligati a darne una descrizione precisa in termini di superfici ben definite. Ad es. un cubo e' costruito con 6 facce piane; un cilindro e' una combinazione di una superficie curva e di due superfici piane; una sfera e' formata da un'unica superficie curva.[23]

Quando bisogna rappresentare oggetti piu' complessi e' necessario usare metodi di approssimazione per poterli definire.

Per l'utente un modo per rappresentare un oggetto arbitrario nel

sistema grafico e' quello di approssimarne i contorni con un insieme di piani o di facce poligonali.[24]

Le superfici dei solidi possono anche essere descritte usando equazioni di curve parametriche, detto anche metodo di rappresentazione mediante "frattali".[25]

Per alcune applicazioni le definizioni dei solidi sono date come metodi di costruzione che generano il solido a partire da forme piu' elementari: ad es. si puo' pensare di ottenere un cilindro ruotando un rettangolo intorno ad uno dei suoi lati (sweep rotazionale) oppure traslando un cerchio su un asse che passa per il suo centro (sweep traslazionale). In tal modo da una figura 2-D si genera una figura 3-D.

Un'altra tecnica di costruzione di solidi consiste nel combinare un insieme-base di oggetti 3-D come cubi, piramidi, cilindri, ottenendo solidi piu' complessi.[26]

Infine si possono rappresentare oggetti tridimensionali usando l'octree, una particolare struttura ad albero.[27] In tal caso lo spazio che contiene l'oggetto e' visto come un cubo di lato pari ad una potenza di 2, (es. 2 elevato a k), cosi' che, dividendo ricorsivamente ogni faccia del cubo in quadranti, si ottengono 8 volumi cubici di lato 2 elevato a k-1, che corrispondono agli 8 nodi figli di ogni nodo a livello superiore nell'octree. Il solido e' quindi rappresentato dall'insieme dei nodi pieni, (cioe' interamente occupati dal solido) dei vari livelli, le dimensioni dei cui ottanti decrescono sempre fino ad un prefissato limite di risoluzione.

3.1 Restituzione grafica

Gli output dei metodi di restituzione devono essere organizzati in modo da ottenere disegni tecnici o carte topografiche. Da qui la necessita' di definire strutture dati ad hoc e possibili interfacce con sistemi grafici.

Nell'introduzione di questo capitolo sono state illustrate alcune delle piu' comuni rappresentazioni di oggetti 3-D; in realta' i metodi di restituzione visti nei capitoli precedenti forniscono solo coordinate 3-D di singoli punti, senza nessuna altra informazione sulle loro connessioni reciproche. Si e' pensato quindi, per avere le informazioni utili per la restituzione grafica, di operare nel seguente modo:

per ogni coppia di immagini digitali stereoscopiche l'operatore, una volta marcati i punti omologhi, mandera' in esecuzione il programma che realizza la restituzione. Le coordinate spaziali calcolate del punto oggetto saranno memorizzate nella tabella dei vertici, nello stesso ordine con cui sono state ottenute.

Una volta che l'operatore ha ottenuto i punti in coordinate 3-D (per ogni coppia di immagini il numero di punti correlati sara' dell'ordine di qualche decina), puo', adeguatamente supportato da un sistema interattivo, definire tutte le linee caratteristiche, o utili, dell'oggetto fotografato, fornendo per ogni linea i due estremi, e riferendosi ai punti utilizzando l'ordine con cui sono stati calcolati. In questo modo la rappresentazione ottenuta da questa particolare coppia di immagini conterra' una tabella dei vertici ed una dei segmenti. A questo punto si puo' pensare di ottenere tutte le informazioni dell'oggetto fotografato (per esempio un monumento) in un'unica rappresentazione, dove le

tabelle dei vertici e dei segmenti saranno date rispettivamente dall'unione delle tabelle dei vertici e dall'unione delle tabelle dei segmenti di tutte le rappresentazioni "parziali" (una per ogni coppia di stereo-foto).[31][32]

Il programma che effettua l'unione deve garantire la consistenza dei dati.

Infatti, vedi fig. 4, se supponiamo che lo spigolo E1, chiamato F1 nella rappresentazione parziale numero 2, e' visibile in due diverse coppie di stereo-foto, nella rappresentazione finale comparira' un solo punto V1, o U1, un solo punto V2, o U2, ed una sola linea E1, o F1.

Per far questo si possono riportare nella tabella dei vertici finale i punti O1 e O2 (le cui coordinate sono date dalle medie aritmetiche rispettivamente delle coordinate di V1 e U1 e delle coordinate di V2 e U2), e nella tabella dei segmenti la linea S1. Da notare che, per esempio, i punti V1 e U1 non avranno le coordinate esattamente uguali, e quindi per capire da programma se V1 e U1 sono le approssimazioni di un unico punto oggetto, bisognera' assumerli uguali quando le loro coordinate soddisferanno la seguente condizione logica:

$$(|x1|-|x1'|<ε \text{ and } |y1|-|y1'|<ε \text{ and } |z1|-|z1'|<ε)$$

questo perche', come si vedra' nel capitolo seguente, la misura ε costituisce una maggiorazione degli errori commessi dal metodo di restituzione proposto (bisogna ricordare che per questo motivo non si possono correlare punti immagine corrispondenti a punti che nel mondo oggetto non distano piu' di ε centimetri).

Una volta dedotto che V1 e U1 sono "uguali", bisogna quindi scoprire, lungo tutte le linee che partono da U1 e da V1, se vi

sono due punti (nel nostro caso V2 e U2) "uguali" e, quindi, due linee uguali; per facilitare quest'operazione di ricerca, si possono inserire nelle tab. dei vertici (come in figura 5) dei puntatori alle linee interessate nelle tabelle dei segmenti.

OSSERVAZIONE

Come si sarà certamente notato, noi abbiamo dato una descrizione dell'oggetto diversa da quelle solitamente usate, elencate all'inizio del capitolo; infatti forniamo una lista di punti e di linee che in effetti consentono una rappresentazione wireframe dell'oggetto, il quale risulta, così, "trasparente".

In tal modo può essere facilmente visualizzato da qualsiasi punto di vista, e con comandi per la rimozione delle linee nascoste si può eliminare la trasparenza ottenendo visioni più realistiche.[29][32]

In questo modo si possono sempre ottenere disegni completi dell'oggetto.

In realtà la lista di punti e di linee che si ottiene unificando le liste "parziali" permette di avere una rappresentazione wireframe quasi completa, a causa delle seguenti possibilità:

- 1) l'operatore può evitare "volutamente" la ricostruzione di alcuni punti e/o linee;
- 2) è impossibile correlare alcuni punti con la coppia di foto di cui si dispone.

Tutto ciò non risulta essere un problema, perché col sistema grafico si può completare il modello con tutti i particolari voluti.

3.2 Un algoritmo per l'unificazione di due rappresentazioni parziali

Il diagramma di flusso dell'algoritmo e' dato in figura 7. L'algoritmo ha come input la tabella dei vertici₁, la tabella dei vertici₂, la tabella dei segmenti₁, la tabella dei segmenti₂ e come output la tabella dei vertici₁ e la tabella dei segmenti₁. Durante l'elaborazione dell'algoritmo vengono create delle tabelle di supporto: la tabella dei vertici doppiati in cui ogni elemento e' della forma (V_i, U_j) dove $V_i \approx U_j$ e la tabella dei segmenti doppiati dove il generico elemento e' della forma (E_i, F_j) dove E_i e F_j sono "uguali"; esse verranno utilizzate poi per rendere consistenti i dati in output.

Per un'esatta unificazione delle rappresentazioni "parziali" occorrera' da parte dell'operatore una particolare attenzione, poiche' (come nel caso dell'esempio 6) per definire la linea passante dai vertici V_5 e V_7 non c'e' bisogno di far calcolare anche il punto V_6 ; in realta' questo punto e' necessario per poter riconoscere l'uguaglianza tra i segmenti F_5 e E_5 . E' ovvio che V_6 non puo' essere un punto fittizio, ma un reale vertice dell'oggetto, altrimenti sarebbe impossibile collimare i suoi punti omologhi sia sulla prima coppia di stereo-foto che sulla seconda.

3.3 Interfacciamento con un sistema di CAD

Come accennato all'inizio del capitolo, si puo' fornire la rappresentazione 3-D di un oggetto ad un sistema grafico.

Nel nostro caso cio' e' particolarmente interessante in quanto la descrizione wireframe finale ottenuta con i metodi illustrati non

e' completa, dato che contiene solo vertici di riferimento e linee principali. Tutti quei dettagli architettonici non importanti per la determinazione di un modello numerico dell'oggetto intero, ma fondamentali per la restituzione grafica di disegni tecnici di buona qualita', possono essere aggiunti utilizzando il sistema grafico.[17]

Inoltre bisognera' completare il modello in tutte le parti in cui, per i motivi esposti prima, non e' stato possibile ottenere una correlazione di punti omologhi e la conseguente determinazione delle coordinate spaziali; spesso cio' e' possibile sfruttando alcune simmetrie note, o da conoscere, dell'oggetto (come spessori di muri, arcate, etc..).

Infine, ai fini della pura e semplice restituzione grafica, si possono sfruttare le enormi potenzialita' di un sistema grafico: accennando solo ad alcune di esse si puo' ricordare la possibilita' di produrre proiezioni assonometriche o ortogonali, di eliminare linee e superfici nascoste, di colorare e riempire aree, di calcolare automaticamente la lunghezza di ogni linea, di produrre disegni automaticamente.

4. DESCRIZIONE DI UN SISTEMA PER LA RESTITUZIONE DIGITALE

Come già accennato, si può automatizzare l'intero processo di ricostruzione di oggetti da visioni stereo.

L'attuale sistema di restituzione, analitica o analogica, può essere sostituito da un più funzionale e veloce sistema di restituzione digitale, a patto che si conoscano opportuni parametri posizionali e di ripresa delle immagini. In seguito verranno illustrati componenti e programmi per la ricostruzione 3-D di oggetti vicini.[33]

4.1 Componenti del sistema

Le componenti hardware del sistema proposto sono:

- 1) dispositivo per l'acquisizione di fotogrammi;
- 2) personal computer con hw dedicato alla grafica ed alla elaborazione di immagini;
- 3) display grafico pittorico con risoluzione di almeno 512x512 pixels;
- 4) plotter.

Le componenti software possono essere classificate nei seguenti insiemi di procedure:

- 1) procedure per l'acquisizione delle immagini
- 2) " per la scelta dei punti omologhi
- 3) " per le trasformazioni geometriche (metodi di restituzione)
- 4) " di integrazione delle rappresentazioni parziali

4.2 Acquisizione dei fotogrammi

Per digitalizzare una stereo-coppia, la scelta dei dispositivi e delle tecniche di acquisizione e' condizionata dal fine che si vuole raggiungere.

In genere si hanno a disposizione lastre fotogrammetriche di dimensione 9cm. x 12cm., da elaborare in modo da avere un errore in modulo non superiore ai 2cm. nel modello 3-D ricostruito. Questo porta a dover scegliere un piccolo passo di campionamento (si e' visto che da 2048 pixels in su si raggiunge una precisione soddisfacente), mentre poca importanza ha la quantizzazione, per cui 8 bits per pixel sono piu' che sufficienti.

Come dispositivo di digitalizzazione si e' pensato di usare una tablet. Ponendo sulla tavoletta la lastra opportunamente ingrandita si possono scegliere i punti omologhi che costituiscono l'input del programma che effettua la ricostruzione 3-D. E' chiaro che l'ingrandimento del fotogramma dipende dalla precisione richiesta nei risultati e dalle caratteristiche tecniche della tablet, quali la risoluzione e l'area attiva.

Esistono in commercio tablet con risoluzione pari a 0.1 mm. ed area attiva pari a 380x260 mm., che e' quella di un foglio formato Uni A3; e' ovvio che tale dispositivo digitalizza anche su tutti i formati inferiori.

Eventualmente si potrebbe digitalizzare con una telecamera, ma le difficolta' insite nell'intero processo di acquisizione ne scoraggiano l'uso.

4.3 Scelta dei punti omologhi

Pur esistendo algoritmi, di diverso tipo e complessita', che

permettono la correlazione automatica dei punti omologhi, si e' preferito che questa fase venga effettuata in maniera interattiva dall'operatore. Questa nostra scelta e' stata dettata dal fatto che il numero effettivo di punti, e quindi di pixels, da correlare e' notevolmente inferiore rispetto al numero di pixels dell'intera immagine. Un'eventuale automatizzazione, quindi, appesantirebbe inutilmente l'elaborazione, dato che si correlerebbero molti punti dell'immagine non significativi.

Nel momento in cui l'operatore vuole selezionare i punti omologhi, pone sulla tablet la prima delle due lastre fotogrammetriche da digitalizzare e con la penna della tablet seleziona i punti in un certo ordine. Poi passa alla seconda lastra e seleziona i punti nello stesso ordine; bisognera' fare attenzione affinche' le due lastre siano nella stessa posizione rispetto al sistema di riferimento della tablet: un'imprecisione di questo tipo potrebbe invalidare i risultati ottenuti.

E' chiaro che quanto piu' sofisticato e' l'hw della macchina, tanto piu' e' efficiente e veloce l'intero processo di ricostruzione.

4.4 Modello tridimensionale restituito

Si e' accennato precedentemente all'uso di un sistema CAD per il disegno dell'oggetto ottenuto.

L'attuale disponibilita' di tali pacchetti software anche su personal computer, infatti, conduce ad un loro vantaggioso uso in questa applicazione, data l'ampia possibilita' da essi offerte. E' importante notare che, se l'oggetto fotografato presenta zone ricche di particolari, come capitelli, bassorilievi etc,

difficilmente visualizzabili e quindi ricostruibili ad una distanza di 30 m. e con un obiettivo di 96.04 mm., possono essere effettuate prese ravvicinate ed effettuare, poi, la restituzione digitale.

4.5 Valutazioni finali

Un confronto tra gli attuali metodi di restituzione e la restituzione digitale puo' essere fatto basandosi su considerazioni di carattere qualitativo ed operativo.

Circa la qualita' del prodotto ottenuto con la restituzione digitale, si puo' dire che la precisione raggiunta e' paragonabile a quella ottenuta con gli usuali metodi restitutivi e che, volendo, si potrebbero raggiungere anche livelli migliori, aumentando il passo di campionamento.

Si e' visto che per ottenere un errore inferiore ai 2 cm. a 30 m. di distanza dall'oggetto, occorre campionare le lastre a 2048 pixels.

E' chiaro che con un campionamento piu' fitto l'errore diminuisce e quindi aumenta la precisione.

Cio' puo' anche non interessare, dato che esistono dei limiti di carattere puramente tecnico (spessore del pennino usato nel disegno), che inficierebbero i risultati ottenuti.

Riguardo alle considerazioni di carattere operativo, il metodo proposto ci sembra senz'altro piu' pratico e veloce, basti pensare alla scomparsa dello stereo-comparatore, il cui uso richiede molto tempo ed esperienza.

Si e' calcolato approssimativamente che la ricostruzione di un oggetto costituito da circa 300 punti ed altrettante linee puo'

essere fatta in circa 6-8 ore da un utente non esperto. E' chiaro che molto dipende dalla velocita' con cui l'operatore sceglie i punti omologhi, perche' la routine di ricostruzione delle coordinate 3-D, con un input di circa 300 punti per ogni immagine, richiede qualche minuto di elaborazione su un IBM PC XT dotato di coprocessore matematico.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. Inghilleri; Topografia Generale; UTET
- [2] Gen. F. Guidi; Fotogrammetria Fotointerpretazione Telerilevamento; Istituto Geografico Militare Italiano, Firenze 1978
- [3] Marsha Jo Hannah; Error Detection and Correction in Digital Terrain Models; Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, vol. 47, No 1, January 1981, pp. 63-69
- [4] L. Borriello, M. Capurso, V. D'Agostino, M. Sasso, S. Volpe; Tecniche di Correlazione di Stereo-Immagine Digitali Applicate alla Costruzione di Modelli Numerici del Terreno; da Computer Graphic, CAD, Elaborazione di Immagini: Sistemi ed Applicazioni; Jackson 1983
- [5] Y. Yakimovsky, R. Cunningham; A System for Extracting Three-Dimensional Measurements from a Stereo-Pair of TV Cameras; rif. CGIP
- [6] R. Galetto, A. Spalla; Approccio Analitico alla Fotogrammetria; Dipartimento di Ingegneria del Territorio, Università di Pavia, rapporto interno
- [7] D. J. Panton; A Flexible Approach to Digital Stereo-Mapping; Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, Vol. 44, No. 12, December 1978, pp. 1499-1512
- [8] F. A. Scarano, G. A. Brumm; A Digital Elevation Data Collection System; Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, Vol. 42, No. 4, April 1976, pp. 489-496
- [9] T. Pavlidis; Structural Pattern Recognition; New-York: Springer-Verlag 1977
- [10] A. Rosenfeld, A. C. Kak; Digital Picture Processing (second edition); New-York: 1976 Academic Press
- [11] W. K. Pratt; Digital Image Processing; John Wiley and Sons, New-York 1978
- [12] I. Carlhom, I. Chakravarty, D. Vanderschel; A Hierarchical Data Structure for Representing the Spatial Decomposition of 3-D Objects; IEEE Computer Graphics and Application, April 1985
- [13] G. Frieder, D. Gordon, R. A. Reynold (Jan. 1985); Back-to-Front Display of Voxel-Based Objects; IEEE Computer Graphics and Applications, 5(1), 52-60
- [14] T. Pavlidis; Structural Pattern Recognition; Berlin, Heildeberg, New York: Springer-Verlag, 1977
- [15] S. E. Masry; Digital Correlation Principles; Photogrammetric

Engineering and Remote Sensing, 1974

[16] L. A. Gambino, M. A. Crombie; Digital Mapping and Digital Image Processing; Photogrammetric Engineering, 1974

[17] Proceedings of the 6th Annual Conference and Exposition [Dallas Convention Center, Dallas, Texas April 14-18, 1985], Vol. 2, Vol.3; National Computer Graphics Association, 1985

Proceedings of the 5th Annual Conference and Exposition [Anaheim Convention Center, Anaheim, California, May 13-17, 1984], Vol. 1, Vol. 2; National Computer Graphics Association 1984

[18] Foley Van Dam; Fundamentals of Interactive Computer Graphics; Addison-Wesley Publishing Company

[19] D. F. Rogers, J. A. Adams; Mathematical Elements for Computer Graphics; McGraw-Hill Book Company, New York 1976

[20] Newmann-Sproull; Principles of Interactive Computer Graphics; Computer Science Series

[21] L. G. Roberts; Homogeneous Matrix Representation and Manipulation of N-Dimensional Constructs; Document MS 1405, Lincoln Laboratory, M. I. T. Cambridge

[22] AutoCAD User's Manual; AutoDESK Inc., 1985

[23] D. Hearn, M. P. Baker; Computer Graphics; Prentice-Hall International Edition, London 1986

[24] A. A. G. Requicha ('80); Representation of Rigid Solid: Theory, Methods and System; ACM Computing Surveys, 12(4)

[25] Mauldebroet BB ('77); Fractals: Form, Chance and Dimension; San Francisco: Freeman Press, 1977

[26] M. S. Casale, E. L. Stanton ('85); An Overview of Analytic Solid Modelling; IEEE Computer Graphics and Application, 11(2), 1985

[27] L. J. Doctor, J. G. Torberg ('81); Display Techniques for Octree-Encoded Objects; IEEE Computer Graphics and Applications, 1(3), 1981

[28] K. Yamaguchi, T. L. Kunii, K. Fujimura; Octree-Related Data Structures and Algorithms; IEEE Computer Graphics and Applications, 4(1), 1984

[29] D. H. Ballard, C. M. Brown; Computer Vision; Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982

[30] P. Suetens, P. Jansen, A. Haegemans, A. Oosterlick, J. Gybels; 3-D Reconstruction of the Blood Vessels of the Brain from

a Stereoscopic Pair of Subtraction Angiograms; CAD Vol.1, No.1.
February 1983

[31] Ho Bin; Inputting Constructive Solid Geometry Representation
Directly from 2-D Orthographic Engineering Drawings; CAD, Vol.18,
No.3, April 1986

[32] R. Haralick, Yu Hong Chu, L. Watson, L. Shapiro; Matching
Wireframe Objects from Their Two-Dimensional Perspective
Projections; Pattern Recognition, Vol.17, No.6, 1984

[33] D. Cooper; Microcomputer Digital Image Processing and
Overlay Mapping for Resource Assessment; Proceedings of the 3th
Annual Conference and Exposition of the National Computer
Graphics Association, Vol.1, 1982

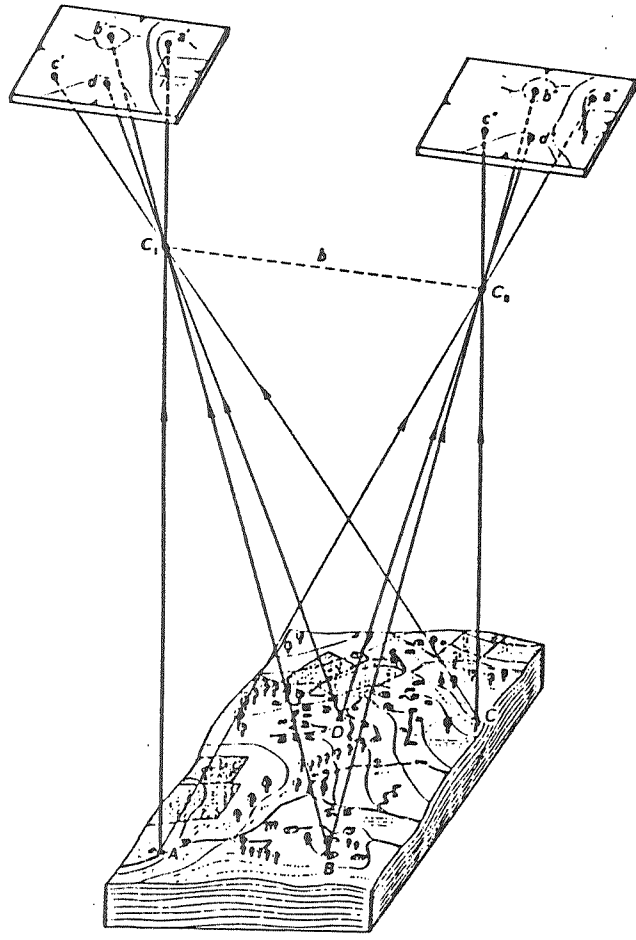
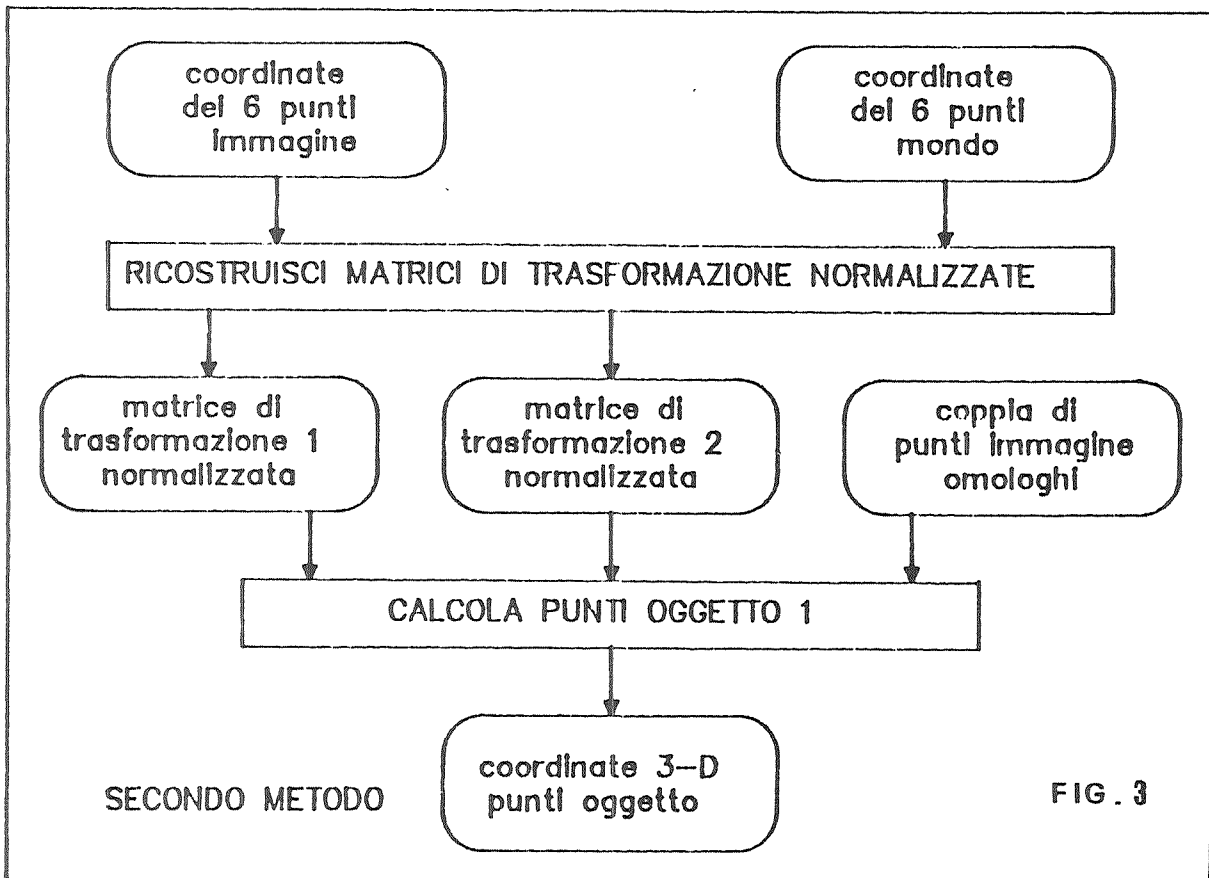
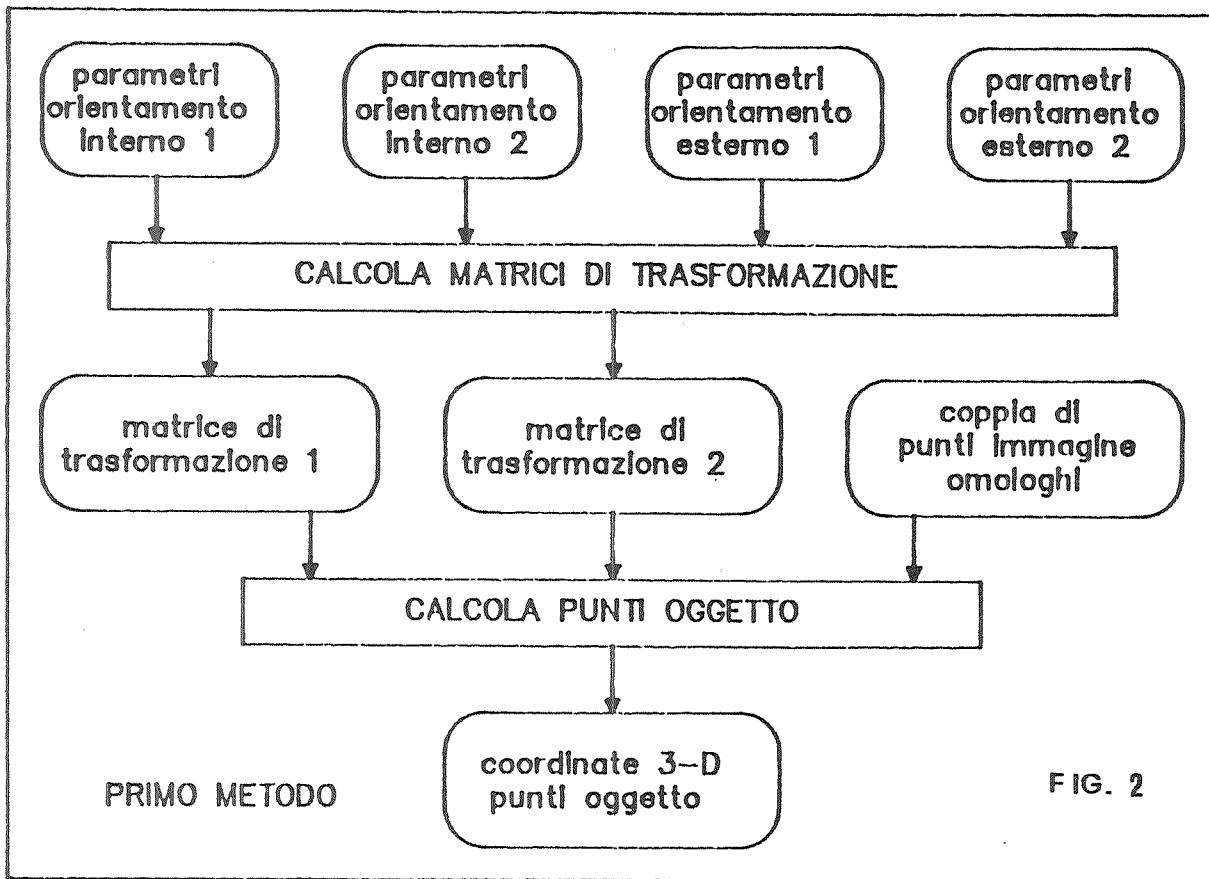


FIG. I



ALGORITMO PER L'UNIONE
DI DUE DESCRIZIONI WF

(a,b) =estremi segm. E1
 (c,d) =estremi segm. Fj

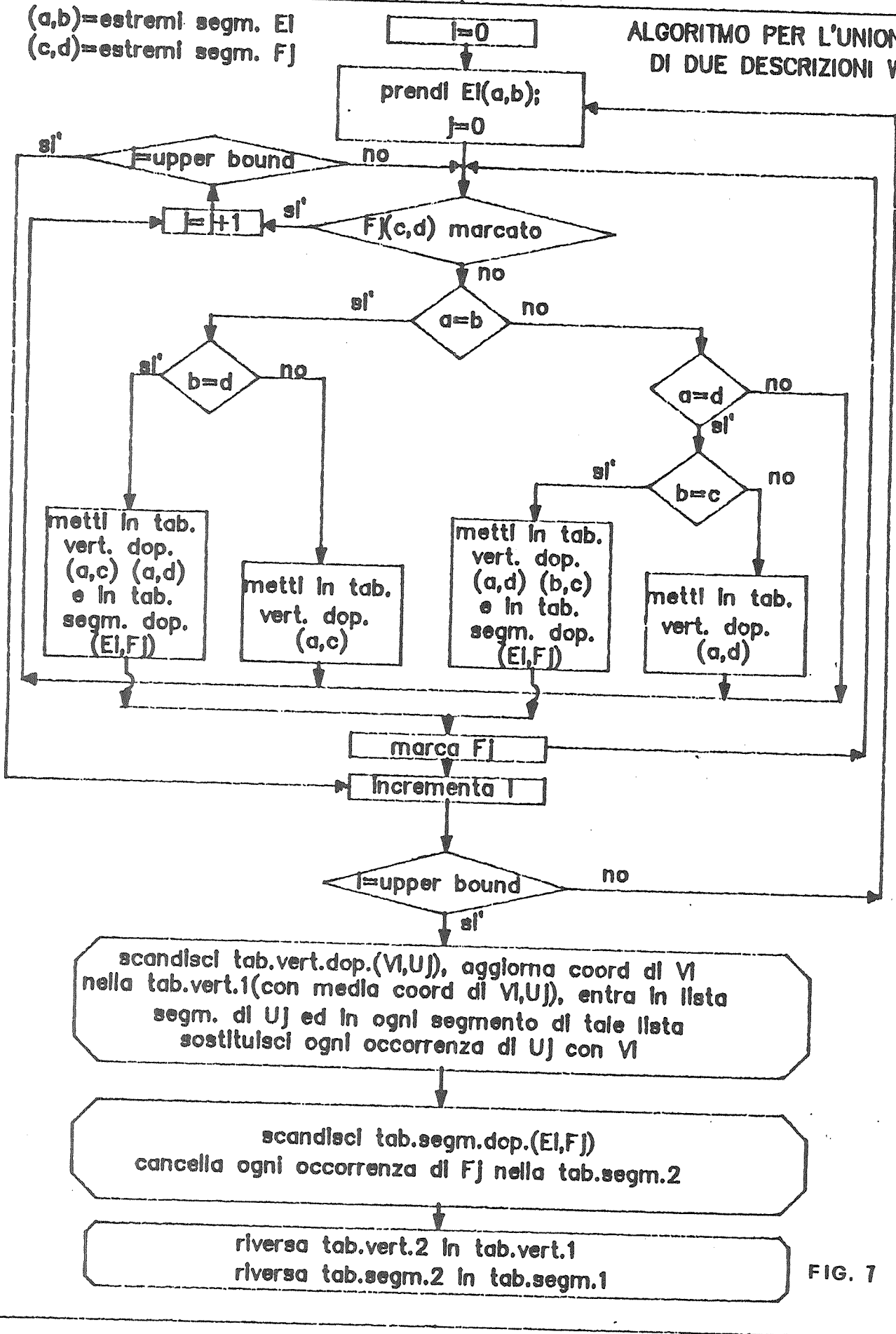


FIG. 7

