Un criterio di arresto per il procedimento di bisezione in presenza di una soglia aleatoria

Giotto Fiorio
C.N.R. - Istituto di Elaborazione dell'Informazione
Via Santa Maria, 46 - 56126 Pisa

Riassunto. Il criterio di arresto studiato in questo lavoro rende attraente il metodo della bisezione in quanto: il procedimento di bisezione non si arresta se e solo se la soglia aleatoria è degenere e contenuta nell'intervallo iniziale chiuso; l'arresto si verifica in media dopo pochi passi se la soglia aleatoria ha probabilità piccola di trovarsi in un intervallo con lo stesso centro e ampiezza doppia dell'intervallo corrente; anche in presenza di discontinuità nella distribuzione della soglia aleatoria (purché questa non sia degenere), la "coda" della distribuzione del numero di passi risulta limitata da una distribuzione geometrica.

1. Introduzione

Il metodo della bisezione, pur essendo ottimale per determinare il valore di una soglia costante contenuta in un intervallo dato, non è presente in letteratura fra i metodi di studio delle soglie aleatorie (vedi [1], cap. 10), perché l'aleatorietà rende incerta l'ipotesi che la soglia sia contenuta nell'intervallo iniziale e, a maggior ragione, nell'intervallo corrente dopo un numero arbitrario di passi. E' facile riconoscere che proprio l'incertezza su questa ipotesi, e non l'aleatorietà in sé, sconsiglia l'impiego della bisezione, infatti, detta G la funzione di ripartizione della soglia aleatoria e

$$a = \inf\{x:G(x)>0\}$$
$$b = \sup\{x:G(x)<1\},$$

se l'intervallo (a,b) è contenuto nell'intervallo iniziale, allora l'intervallo corrente dopo un numero qualsiasi di passi di bisezione ha, con probabilità uno, almeno un estremo in comune con (a,b); perciò, quando (a,b) è propriamente contenuto nell'intervallo iniziale e l'ampiezza dell'intervallo finale è maggiore di $b-a$, il metodo della bisezione è ancora ottimale per localizzarlo.

Il metodo stesso non perde molto in efficienza se la condizione sull'ampiezza dell'intervallo finale viene attenuata in "non molto minore di $b-a$", anche perché $b-a$ potrebbe essere molto più grande di qualunque ragionevole parametro di dispersione della soglia aleatoria. D'altra parte, nella pratica, è più frequente sapere con ragionevole certezza che la soglia è compresa nell'intervallo iniziale, che non conoscerne la dispersione. In questi casi sarebbe utile un criterio di arresto del procedimento di bisezione, che fosse sensibile alla dispersione della soglia.

Il criterio di arresto proposto in questo lavoro consiste nel richiedere la risposta ad uno stimolo la cui ampiezza sta fuori dell'intervallo corrente: l'ipotesi che la soglia vi sia contenuta con probabilità uno è smentita se la soglia viene superata da uno stimolo minore dell'estremo sinistro dell'intervallo corrente o non viene superata da uno maggiore dell'estremo destro, ed in questi casi il procedimento si arresta. Se però la probabilità che la soglia sia contenuta nell'intervallo corrente è minore di uno, il criterio di arresto non si verifica con certezza, essendo basato sulla realizzazione di una variabile aleatoria. Perciò il comportamento del criterio stesso va studiato con cura.

L'aleatorietà del criterio di arresto risulta vantaggiosa nella pratica, perché permette di applicarlo ai casi in cui l'intervallo (a,b) non è contenuto nell'intervallo iniziale, e di ottenere risultati utili quando la probabilità che la soglia sia contenuta nell'intervallo iniziale è vicina ad uno.

Il costo del criterio di arresto consiste nella richiesta di due risposte, anziché una, ad ogni passo di bisezione: se però il criterio di arresto si verifica prima che sia stato eseguito il numero di passi prefissato, allora il costo complessivo può essere anche molto più basso di quello del procedimento di bisezione senza criterio di arresto, mentre il risultato ottenuto è almeno altrettanto ricco di informazione.

2. Il criterio di arresto

Sia $G:\mathbb{R}\to[0,1]$ una funzione non decrescente. Il procedimento di bisezione può essere descritto (vedi [2]) dalla condizione iniziale $X_o=1/2$ e dalle variabili aleatorie Y_n $(n=0,1,\ldots)$ a valori in $\{0,1\}$, e X_n $(n=1,2,\ldots)$ a valori in $\{(2k+1)2^{-n-1}: k=0,1,\ldots 2^n-1\}$, definite come segue

$$P(Y_n=1|X_n=x) = G(x)$$
$$P(Y_n=0|X_n=x) = 1-G(x)$$
$$X_{n+1} = X_n+(1-2Y_n)2^{-n-2}.$$

Un possibile criterio di arresto per il procedimento di bisezione consiste nel considerare anche le variabili aleatorie V_n $(n=0,1,\ldots)$, a valori in $\{(2k+1)2^{-n-1}:k=-1,0,1,\ldots 2^n\}$, e W_n $(n=0,1,\ldots)$, a valori in $\{0,1\}$, definite come segue

$$V_n = X_n+(1-2Y_n)2^{-n}$$
$$P(W_n=1|V_n=x) = G(x)$$
$$P(W_n=0|V_n=x) = 1-G(x)$$

e nel fermare il procedimento al passo n se $W_n=Y_n$.

Sia A_n, $n\geq 0$, l'evento $W_n=Y_n$, cioè l'arresto al passo n; se per $n>0$ risulta $P(\overline{A}_0\cap\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_{n-1})>0$, allora

$$P(\overline{A}_0\cap\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_n) = P(\overline{A}_0)\ P(\overline{A}_1|\overline{A}_0)\ \ldots\ P(\overline{A}_n|\overline{A}_0\cap\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_{n-1}). \tag{1}$$

Poiché, per $n>0$ e $\overline{A}_0\cap\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_{n-1}$ non vuoto, gli eventi $X_n=x$ e $X_n=y$ sono incompatibili quando $x\neq y$, e $\bigcup_x(X_n=x)=\overline{A}_0\cap\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_{n-1}$, gli eventi $X_n=(2k+1)2^{-n-1}$, con $k=0,1,\ldots 2^n-1$, costituiscono una partizione dell'evento $\overline{A}_0\cap\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_{n-1}$ e

$$\sum_x P(X_n=x) = P(\overline{A}_0\cap\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_{n-1}) \leq 1; \tag{2}$$

dunque, in presenza del criterio di arresto, X_n non è più definita su tutto l'evento certo, bensì solo su $\overline{A}_0\cap\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_{n-1}$: tuttavia faremo ancora uso degli eventi $X_n=x$ quando $P(\overline{A}_0\cap\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_{n-1})>0$; inoltre i simboli $\sum_x$ e $\min_x$ indicheranno la somma ed il minimo ottenuti facendo variare x fra tutti i valori per cui $P(X_n=x)>0$. Sarà allora, se $P(\overline{A}_0\cap\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_{n-1})>0$,

$$P(A_n) = P(A_n\cap\overline{A}_0\cap\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_{n-1}) = \sum_x P(X_n=x)\ P(A_n|X_n=x), \tag{3}$$

$$P(A_n|\overline{A}_0\cap\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_{n-1}) \geq \min_x P(A_n|X_n=x). \tag{4}$$

Inoltre, per la definizione di Y_n e di W_n,

$$P(A_n|X_n=x) = G(x)\ G(x-2^{-n}) + [1-G(x)][1-G(x+2^{-n})] \tag{5}$$

e, siccome G è non decrescente,

$$P(A_n|X_n=x) \geq [G(x-2^{-n})]^2 + [1-G(x+2^{-n})]^2. \tag{6}$$

Poniamo $A=\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente affinché sia $P(A)=0$ è che esista un a tale che $0\leq a\leq 1$ e

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<a \\ 1 & \text{se } x>a. \end{cases}$$

Inoltre, se $P(A)>0$ allora $P(A)=1$.

Dimostrazione. Supponiamo che sia $P(A)=0$; questo implica $P(A_n)=0$ e $\sum_x P(X_n=x)=1$ per ogni n. Da (3) e (6) segue che $G(x-2^{-n})=0$ e $G(x+2^{-n})=1$ per ogni x tale che $P(X_n=x)>0$. Sia a_n il più piccolo di questi x; allora $G(a_n-2^{-n})=0$ e $G(a_n+2^{-n})=1$, inoltre la successione $\{a_n\}$ converge, infatti, per la definizione di X_{n+1}, $|a_{n+1}-a_n|=2^{-n-2}$ e, poiché $2^{-n-1}\leq a_n\leq 1-2^{-n-1}$, il suo limite sarà $a\in[0,1]$. Dunque la condizione è necessaria.

Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente: dalla (5) con $n=0$ e $X_0=1/2$ risulta $P(A_0)=0$ e $\sum_x P(X_1=x)=1$; supponiamo che sia $\sum_x P(X_n=x)>0$; dalla definizione di X_n risulta che $P(X_n=x)=0$ se $|x-a|>2^{-n-1}$; sarà allora $|x-a|\leq 2^{-n-1}$, $x-2^{-n}<a<x+2^{-n}$, $G(x-2^{-n})=0$ e $G(x+2^{-n})=1$ per ogni x tale che $P(X_n=x)>0$; dalla (5) segue che $P(A_n|X_n=x)=0$ e, dalla (3), che $P(A_n)=0$ e $\sum_x P(X_{n+1}=x)=\sum_x P(X_n=x)$; questo vale per ogni n, quindi $P(A)=0$.

Se $P(A)>0$ allora, per qualche n e qualche x, sarà

$$P(X_n=x)\ P(A_n|X_n=x) > 0.$$

Dalla (5) si ottiene

$$P(A_n|X_n=x) \leq G(x-2^{-n}) + 1-G(x+2^{-n})$$

dunque

$$G(x-2^{-n}) + 1-G(x+2^{-n}) > 0.$$

D'altra parte $P(X_n=x)>0$ implica che siano vere entrambe le condizioni $G(x-2^{-n-1})<1$ e $G(x+2^{-n-1})>0$. Poniamo

$$\varepsilon = \max\left\{\min\{G(x-2^{-n}),1-G(x-2^{-n-1})\},\min\{G(x+2^{-n-1}),1-G(x+2^{-n})\}\right\};$$

da quanto sopra risulta $\varepsilon>0$. In altre parole, in uno o l'altro dei due intervalli chiusi

$$[x-2^{-n},x-2^{-n-1}] \quad \text{oppure} \quad [x+2^{-n-1},x+2^{-n}]$$

la funzione G è diversa sia da 0 che da 1 per più di ε; l'ampiezza di tale intervallo è 2^{-n-1} e allora, qualunque sia $y\in(0,1)$,

$$[G(y-2^{-k})]^2 + [1-G(y+2^{-k})]^2 \geq \varepsilon^2$$

per ogni $k\geq n+2$. Dalla (4) e dalla (6) segue

$$P(A_k|\overline{A_0\cap A_1\cap\ldots\cap A_{k-1}}) \geq \varepsilon^2$$

$$P(\overline{A_k}|\overline{A_0\cap A_1\cap\ldots\cap A_{k-1}}) \leq 1-\varepsilon^2$$

per ogni $k\geq n+2$. Per la (1) risulta allora

$$P(\overline{A}) = \lim_{k\to\infty} P(\overline{A_0\cap A_1\cap\ldots\cap A_k}) \leq \lim_{k\to\infty} (1-\varepsilon^2)^{k-n-2} = 0$$

e $P(A)=1$. ∎

Quando $P(A)>0$ possiamo definire la v.a. N, a valori interi maggiori o uguali a zero, come il numero del passo in cui si verifica il criterio di arresto: infatti gli eventi A_n e A_m sono incompatibili per $n\neq m$ ed il teorema sopra dimostrato garantisce che $\sum_n P(N=n)=1$. Allora l'evento A_n coincide con $N=n$ e, per $n>0$, l'evento $\overline{A_0\cap A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}$ con $N\geq n$.

3. La distribuzione di N in alcuni casi particolari

Esempio 1. Supponiamo che sia $G(x)=p$ costante con $0<p<1$ per $-1/2\leq x\leq 3/2$; per la (5), la probabilità condizionata di arresto al passo n risulta

$$P(N=n|N\geq n) = p^2 + (1-p)^2 = 1 - 2p(1-p)$$

per ogni $n\geq 0$ e non dipende da X_n. Posto $w=p(1-p)$, risulta $0<w\leq 1/4$ e, per la (1),

$$P(N\geq n) = (2w)^n;$$

la distribuzione di N è di tipo geometrico: $P(N=n)=(2w)^n(1-2w)$, $E(N)=1/(1-2w)-1\leq 1$ e $\mathrm{Var}(N)=2w/(1-2w)^2\leq 2$. ∎

Nell'esempio 2, che vedremo fra poco, la distribuzione di N verifica una relazione ricorrente del tipo seguente: sia $\{P_n(x):n\geq 0\}$ una successione di polinomi in x tali che, per $n>1$, valga la relazione ricorrente

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) - xP_{n-2}(x); \qquad (7)$$

se $P_0(x)$ e $P_1(x)$ sono costanti maggiori di zero, il grado di $P_n(x)$ è $\lfloor n/2\rfloor$ (il massimo intero minore o uguale ad $n/2$).

Un esempio di polinomi di questo tipo è p^n+q^n, dove $p+q=1$, nella variabile pq: abbiamo infatti $p^0+q^0=2$, $p^1+q^1=1$, inoltre

$$p^n+q^n = p^{n-1}(1-q)+q^{n-1}(1-p) = (p^{n-1}+q^{n-1})-pq(p^{n-2}+q^{n-2}).$$

Esempio 2. Sia $0<p<1$ e

$$G(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ p & \text{se } 0<x<1 \\ 1 & \text{se } x>1. \end{cases}$$

Dalla (5) si ricava $P(N=0)=0$ e, per $n>0$,

$$P(N=n|X_n=x) = \begin{cases} (1-p)^2 & \text{se} \quad x=2^{-n-1} \\ p^2+(1-p)^2 & \text{se} \quad 2^{-n-1}<x<1-2^{-n-1} \\ p^2 & \text{se} \quad x=1-2^{-n-1}. \end{cases}$$

Inoltre

$$P(X_n=2^{-n-1}) = P(X_{n-1}=2^{-n})\ p = p^n$$

$$P(X_n=1-2^{-n-1}) = P(X_{n-1}=1-2^{-n})\ (1-p) = (1-p)^n$$

essendo $P(X_0=1/2)=1$; quindi, per la (2),

$$P(2^{-n-1}<X_n<1-2^{-n-1}) = P(N\geq n)-p^n-(1-p)^n.$$

Per la (3)

$$P(N=n) = p^n(1-p)^2+[P(N\geq n)-p^n-(1-p)^n][p^2+(1-p)^2]+(1-p)^np^2 =$$

$$= P(N\geq n)[1-2p(1-p)]-p^{n+2}-(1-p)^{n+2},$$

$$P(N\geq n) = P(N\geq n-1)-P(N=n-1) = 2p(1-p)P(N\geq n-1)+p^{n+1}+(1-p)^{n+1}.$$

Posto $w=p(1-p)$ e $R_n(w)=p^n+(1-p)^n$ che, come abbiamo visto, sono polinomi in w che soddisfano la (7), la relazione ora trovata si scrive

$$P(N\geq n) = 2wP(N\geq n-1) + R_{n+1}(w). \tag{8}$$

Essa, insieme a $P(N\geq 0)=1$, determina la distribuzione di N: risulta $P(N\geq 1)=1$ e

$$P(N\geq 2) = 1 - w = P(N\geq 1) - wP(N\geq 0).$$

Supposta vera, per qualche n, la relazione

$$P(N\geq n) = P(N\geq n-1) - wP(N\geq n-2), \tag{9}$$

dalla (8) segue

$$\begin{aligned} P(N\geq n+1) &= 2wP(N\geq n) + R_{n+2}(w) = \\ &= 2w[P(N\geq n-1)-wP(N\geq n-2)] + R_{n+1}(w) - wR_n(w) = \\ &= 2wP(N\geq n-1)+R_{n+1}(w) - w[2wP(N\geq n-2)+R_n(w)] = \\ &= P(N\geq n) - wP(N\geq n-1), \end{aligned}$$

dunque, per induzione, la relazione (9) è vera per ogni $n>1$. Abbiamo infine, per $n>0$,

$$P(N=n) = P(N\geq n) - P(N\geq n+1) = wP(N\geq n-1).$$

Dunque sia $P(N \geq n)$ che $P(N=n)$ sono polinomi in w che soddisfano la relazione ricorrente (7).

Riassumendo abbiamo

$$P(N \geq 0) = 1 \qquad\qquad P(N=0) = 0$$
$$P(N \geq 1) = 1 \qquad\qquad P(N=1) = w$$
$$P(N \geq n) = P(N \geq n-1) - wP(N \geq n-2) \qquad P(N=n) = P(N=n-1) - wP(N=n-2)$$

dove $w=p(1-p)$ è soggetto alle limitazioni $0<w \leq 1/4$.

Poniamo $p_n = P(N=n)$, $S=\sum_n p_n$ e verifichiamo che $S=1$:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = w + \sum_{n=2}^{\infty} (p_{n-1} - wp_{n-2}) = w + S - wS$$

da cui segue $S=1$ per ogni $w \neq 0$. Calcoliamo ora media e varianza:

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = w + \sum_{n=2}^{\infty} n(p_{n-1} - wp_{n-2}) =$$
$$= w + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1+1)p_{n-1} - w\sum_{n=2}^{\infty} (n-2+2)p_{n-2} =$$
$$= w + E(N) + S - wE(N) - 2wS =$$
$$= 1 - w + E(N) - wE(N);$$

da cui

$$E(N) = (1-w)/w \geq 3;$$

tenendo presente le identità

$$n^2 = (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 = (n-2)^2 + 4(n-2) + 4,$$

calcoliamo $E(N^2)$:

$$E(N^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n = w + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 (p_{n-1} - wp_{n-2}) =$$
$$= w + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)^2 p_{n-1} + 2\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)p_{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} p_{n-1}$$
$$- w\sum_{n=2}^{\infty} (n-2)^2 p_{n-2} - 4w\sum_{n=2}^{\infty} (n-2)p_{n-2} - 4w\sum_{n=2}^{\infty} p_{n-2} =$$
$$= w + E(N^2) + 2E(N) + S - wE(N^2) - 4wE(N) - 4wS,$$

da cui

$$E(N^2) = (2-5w+w^2)/w^2;$$

infine

$$\mathrm{Var}(N) = (1-3w)/w^2$$
$$\mathrm{Var}(N)/[E(N)]^2 = (1-3w)/(1-w)^2.$$

La radice quadrata di quest'ultimo rapporto, che può essere interpretata come misura della dispersione di N relativa alla sua media, al variare di p varia tra 2/3 e 1.

Poiché, in questo esempio, G è la funzione di ripartizione di una soglia aleatoria con varianza w, è significativo il confronto tra questa ed il quadrato della lunghezza $L=2^{-N}$ dell'intervallo di bisezione all'arresto; perciò calcoliamo

$$E(L^2) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} p_n = \frac{1}{4} w + \sum_{n=2}^{\infty} 4^{-n} (p_{n-1} - w p_{n-2}) =$$

$$= \frac{1}{4} w + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} 4^{-n+1} p_{n-1} - \frac{1}{16} w \sum_{n=2}^{\infty} 4^{-n+2} p_{n-2} =$$

$$= \frac{1}{4} w + \frac{1}{4} E(L^2) - \frac{1}{16} w E(L^2),$$

da cui

$$E(L^2) = 4w/(12+w).$$

In questo esempio dunque, la distribuzione di N è tale che, in media, 4^{-N} vale circa 1/3 della varianza della soglia aleatoria. ∎

Nell'esempio 2, $E(N)$ è minimo e vale 3 quando $p=1/2$, al contrario dell'esempio 1 dove, per $p=1/2$, $E(N)$ è massimo e vale 1: tale effetto sulla distribuzione di N è dovuto alle discontinuità di G. La distribuzione di N in presenza di una generica discontinuità non è facile da studiare, come mostra l'esempio seguente.

Esempio 3. Siano $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p+q \leq 1$ e

$$G(x) = \begin{cases} p & \text{se } -1/2 \leq x < 1 \\ 1-q & \text{se } 1 < x \leq 3/2. \end{cases}$$

In questo caso

$$P(N=n \mid X_n = x) = \begin{cases} p^2 + (1-p)^2 & \text{se } x < 1-2^{-n-1} \\ p^2 + (1-p)q & \text{se } x = 1-2^{-n-1} \end{cases}$$

$$P(X_n = 1-2^{-n-1}) = P(X_{n-1} = 1-2^{-n})(1-p)(1-q) = (1-p-q+pq)^n$$

$$P(X_n < 1-2^{-n-1}) = P(N \geq n) - (1-p-q+pq)^n$$

$$P(N=n) = P(N \geq n)[1-2p(1-p)] - (1-p-q+pq)^n (1-p)(1-p-q)$$

$$P(N \geq n+1) = 2p(1-p)P(N \geq n) + (1-p-q+pq)^n (1-p)(1-p-q).$$

Tale relazione ricorrente permette di calcolare numericamente la distribuzione di N, ma non ci sembra permettere il calcolo dei momenti in forma chiusa. ∎

L'esempio 3 suggerisce di cercare delle limitazioni per la distribuzione di N nei casi in cui questa non sia facilmente trattabile. A questo scopo sono stati studiati i seguenti problemi di minimo.

Definizione. Siano $p\geq 0$, $q\geq 0$, $p+q\leq 1$; diciamo che la funzione G appartiene alla classe $\mathscr{C}(n,x,p,q)$ se è non decrescente e se $p\leq G(x-2^{-n})$, $G(x+2^{-n})\leq 1-q$.

Problema 1. Trovare il minimo di $P(A_n|X_n=x)$ al variare di G nella classe $\mathscr{C}(n,x,p,q)$.

Soluzione. Per la (5), $P(A_n|X_n=x)$ dipende da tre valori di G, perciò possiamo scrivere il problema nella forma: trovare il minimo di $g_2g_1+(1-g_2)(1-g_3)$ con i vincoli $p\leq g_1\leq g_2\leq g_3\leq 1-q$ delimitanti un tetraedro dello spazio (g_1,g_2,g_3). Le derivate rispetto a g_1 e g_3 valgono rispettivamente g_2 e $-(1-g_2)$, perciò almeno un punto di minimo si trova sullo spigolo $g_1=p$, $g_3=1-q$; su questo spigolo la funzione è costante quando $p=q$, altrimenti il minimo si trova all'estremo $g_2=p$ se $p>q$, all'estremo $g_2=1-q$ se $p<q$. Dunque, posto $r=\max\{p,q\}$, $s=\min\{p,q\}$, risulta

$$\min_G P(A_n|X_n=x) = r^2 + s(1-r)$$

quando $G(x-2^{-n})=p$, $G(x+2^{-n})=1-q$, inoltre $G(x)=p$ se $p>q$, $G(x)=1-q$ se $p<q$, $p\leq G(x)\leq 1-q$ se $p=q$. La soluzione trovata si può mettere nella forma

$$\min_G P(A_n|X_n=x) = 1-(1+r-s)(1-r) = 1-(2r+\delta)(1-r)$$

avendo posto $\delta=1-p-q$. ∎

Problema 2. Trovare il minimo di $P(A_n\cup A_{n+1}|X_n=x)$ al variare di G nella classe $\mathscr{C}(n,x,p,q)$.

Soluzione. Poiché

$$\begin{aligned} P(A_n\cup A_{n+1}|X_n=x) &= g_4\Big(g_1+(1-g_1)[g_3g_2+(1-g_3)(1-g_5)]\Big) + \\ &+ (1-g_4)\Big((1-g_7)+g_7[g_5g_3+(1-g_5)(1-g_6)]\Big) \end{aligned} \tag{10}$$

dove $g_1=G(x-2^{-n})$, $g_2=G(x-3\cdot 2^{-n-2})$, $g_3=G(x-2^{-n-2})$, $g_4=G(x)$, $g_5=G(x+2^{-n-2})$, $g_6=G(x+3\cdot 2^{-n-2})$, $g_7=G(x+2^{-n})$, il problema consiste nel trovare il minimo della (10) al variare delle g_i con i vincoli

$$p \leq g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq g_4 \leq g_5 \leq g_6 \leq g_7 \leq 1-q.$$

Nel poliedro delimitato dai vincoli le derivate rispetto a g_1 e g_2

sono positive, quelle rispetto a g_6 e g_7 sono negative, perciò la (10) è minima quando $g_1=g_2=p$, $g_6=g_7=1-q$, e il problema si riduce a trovare il minimo, al variare di di g_3,g_4,g_5, di

$$f(g_3,g_4,g_5)=g_4\Big(p+(1-p)[g_3p+(1-g_3)(1-g_5)]\Big)+(1-g_4)\Big(q+(1-q)[g_5g_3+(1-g_5)q]\Big)$$

nel tetraedro

$$p \le g_3 \le g_4 \le g_5 \le 1-q \tag{11}$$

avente tre spigoli paralleli ai vettori della base canonica e gli altri tre definiti come segue

$$S^1 = \{(g_3,g_4,g_5):g_3=p,p\le g_4=g_5\le 1-q\}$$
$$S^2 = \{(g_3,g_4,g_5):p\le g_3=g_4\le 1-q,g_5=1-q\}$$
$$S^3 = \{(g_3,g_4,g_5):p\le g_3=g_4=g_5\le 1-q\}.$$

Poiché f è lineare rispetto a ciascuna variabile, almeno un punto di minimo di f sul tetraedro (11) deve trovarsi nell'unione degli spigoli obliqui $S^1\cup S^2\cup S^3$ (vedi [3]). D'altra parte le restrizioni di f sugli spigoli S^1, S^2 ed S^3 sono concave. Infatti, dette f_1, f_2 ed f_3 tali restrizioni e g la variabile $g_4=g_5$ in f_1, $g_3=g_4$ in f_2 e $g_3=g_4=g_5$ in f_3, risulta

$$d^2f_1/dg^2 = d^2f_2/dg^2 = -(p-q)^2-(1-p)(1-q) \le 0,$$

mentre

$$d^2f_3/dg^2 = 2[3p(1-g)+3qg-1-p^2-q^2];$$

per dimostrare che questa derivata è minore o uguale a zero per ogni g compreso fra p e $1-q$, si deve considerarla funzione di p, q e g, e cercarne il massimo vincolato nel tetraedro $0\le p\le g\le 1-q\le 1$: esso risulta valere 0 nel punto $p=q=g=1/2$. Quindi almeno un punto di minimo di $f(g_3,g_4,g_5)$ sta su uno dei quattro vertici del tetraedro (11). Per la precisione, la (10) assume valore minimo quando $g_1=g_2=p$, $g_6=g_7=1-q$ e

$$\begin{array}{ll} g_3=g_4=g_5=p & \text{se } p^2+q^2\ge q(1+p), \\ g_3=g_4=p,\quad g_5=1-q & \text{se } p^2+q^2\le q(1+p) \text{ e } p\ge q, \\ g_3=p,\quad g_4=g_5=1-q & \text{se } p^2+q^2\le p(1+q) \text{ e } p\le q, \\ g_3=g_4=g_5=1-q & \text{se } p^2+q^2\ge p(1+q). \end{array}$$

Posto $r=\max\{p,q\}$, $s=\min\{p,q\}$, il valore del minimo risulta

$$\begin{array}{ll} r+2s-r^2-3rs-s^2+3r^3+2rs^2-2r^4+r^3s-r^2s^2 & \text{se } r^2+s^2\ge s(1+r), \\ r+s-2rs+s^2+r^3-s^3-r^4+r^3s-r^2s^2+rs^3 & \text{se } r^2+s^2\le s(1+r). \end{array}$$ ∎

Utilizziamo ora i risultati ottenuti per trovare delle limitazioni alla distribuzione di N in presenza di una discontinuità di G interna all'intervallo $(0,1)$.

Esempio 4. Siano $0<a<1$, $p\geq 0$, $q\geq 0$, $p+q\leq 1$ e

$$G(x) = \begin{cases} p & \text{se } -1/2\leq x<a \\ 1-q & \text{se } a<x\leq 3/2. \end{cases}$$

Se[1] $a\in(0,1)\backslash Q$, allora è unica la successione di intervalli di bisezione (α_n,β_n) convergente ad a; ponendo $a_n=(\alpha_n+\beta_n)/2$, dalla (2), e poiché $P(X_o=1/2)=1$, risulta

$$P(N\geq n) \geq P(X_n=a_n) = P(X_{n-1}=a_{n-1})\ (1-p)\ (1-q) = (1-p-q+pq)^n.$$

Se invece $a\in(0,1)\cap Q_k\backslash Q_{k-1}$, allora

$$\begin{aligned} P(X_k=a-2^{-k-1}) &= P(X_{k-1}=a)\ G(a)\ (1-p) \geq \\ &\geq P(X_{k-1}=a)\ G(a)\ (1-p)\ (1-q), \\ P(X_k=a+2^{-k-1}) &= P(X_{k-1}=a)\ (1-G(a))\ (1-q) \geq \\ &\geq P(X_{k-1}=a)\ (1-G(a))\ (1-p)\ (1-q), \end{aligned}$$

la cui somma è maggiore o uguale a $P(X_{k-1}=a)(1-p)(1-q)$; inoltre per $n>k$ valgono ancora le relazioni

$$\begin{aligned} P(X_n=a-2^{-n-1}) &= P(X_{n-1}=a-2^{-n})\ (1-p)\ (1-q) \\ P(X_n=a+2^{-n-1}) &= P(X_{n-1}=a+2^{-n})\ (1-p)\ (1-q) \end{aligned}$$

dunque la limitazione inferiore

$$P(N\geq n) \geq (1-p-q+pq)^n \tag{12}$$

vale in ogni caso.

D'altra parte la funzione G di questo esempio appartiene a tutte le classi $\mathscr{C}(n,x,p,q)$ con $n\geq 0$, $x\in(0,1)\cap Q_{n+1}\backslash Q_n$. Dunque, posto $r=\max\{p,q\}$, $s=\min\{p,q\}$, dal problema 1 risulta

$$\min_x P(A_n|X_n=x) \geq r^2+s(1-r)$$

per ogni n e, per la (4) e la (1),

$$P(N\geq n) \leq (1+r-s)^n(1-r)^n.$$

Se $p+q=1$, quindi $1-s=r$ e $r(1-r)=pq$, da questa limitazione e

---

[1] Le definizioni di Q, Q_n, (α_n,β_n) si trovano in [2].

dalla (12) otteniamo

$$(pq)^n \le P(N\ge n) \le (2pq)^n$$
$$1/(1-pq) - 1 \le E(N) \le 1/(1-2pq) - 1$$

e dall'esempio 1 vediamo che, in questo caso, i valori esatti coincidono con la limitazione superiore.

Se $s=0$ le stesse limitazioni danno

$$(1-r)^n \le P(N\ge n) \le (1-r^2)^n$$
$$1/r - 1 \le E(N) \le 1/r^2 - 1$$

e, se $r<<1$, risultano molto differenti. Dalla soluzione del problema 2 possiamo ricavare una migliore limitazione superiore utilizzando la probabilità di arresto in due passi. A questo scopo usiamo, anziché la (1), la formula

$$P(N\ge 2n) = P(\overline{A_0\cup A_1})\ P(\overline{A_2\cup A_3}|N\ge 2)\ \ldots\ P(\overline{A_{2n-2}\cup A_{2n-1}}|N\ge 2n-2)$$

e cerchiamo il minimo di $P(A_n\cup A_{n+1}|X_n=x)$ al variare di x: esso è maggiore o uguale a

$$\mu = \min_G P(A_n\cup A_{n+1}|X_n=x)$$

trovato nel problema 2. Tale minimo non dipende da n quindi

$$P(N\ge 2n) \le (1-\mu)^n = (\sqrt{1-\mu})^{2n}$$

e, tenendo conto anche della (12),

$$(1-p-q+pq)^n \le P(N\ge n) \le (\sqrt{1-\mu})^{n-1}$$
$$1/(p+q-pq)-1 \le E(N) \le 1/(1-\sqrt{1-\mu}).$$

Se $s=0$, dal problema 2 risulta $\mu=r-r^2+3r^3-2r^4$ e, se $r<<1$, trascurando i termini di ordine superiore al primo, $\sqrt{1-\mu}\approx 1-r/2$: la limitazione superiore risulta così molto più vicina a quella inferiore. ■

4. Conclusioni

Concludiamo con qualche osservazione sul comportamento del criterio di arresto nel caso che la funzione di ripartizione G della soglia aleatoria sia continua.

Se G è continua allora lo è uniformemente e, fissato $\delta>0$, esiste un intero n tale che $G(x+2^{-n})-G(x-2^{-n})<\delta$ per ogni $x\in(0,1)$; posto $r=\max\{G(x-2^{-n}),1-G(x+2^{-n})\}$, dalla soluzione del problema 1 risulta

$$P(N=n|X_n=x) \ge 1-2r(1-r)-\delta(1-r);$$

al variare di x, tale probabilità risulta minima in prossimità della mediana della soglia, ed ivi si concentra, al crescere di k, la distribuzione $P(X_k=x|N\geq k)$. Inoltre, per ogni $k\geq n$,

$$P(N=k|N\geq k) \geq \min_x P(N=k|X_k=x) \geq \min_x P(N=n|X_n=x) \geq 1/2-\delta$$

e $P(N\geq k)\leq(1/2+\delta)^{k-n}$; se $\delta<1/2$, $E(N-n|N\geq n) \leq 1/(1/2-\delta)-1$ e, se si prende $\delta<<1/2$, si vede che la "coda" della distribuzione di N contribuisce in modo trascurabile alla sua media.

D'altra parte, anche se G è assolutamente continua, ma nell'intervallo $(0,1)$ ci sono regioni di alta densità, il comportamento del criterio di arresto nei primi passi del procedimento di bisezione risulta simile al caso in cui in quelle regioni ci fosse una discontinuità. Supponiamo infatti che, per qualche $x\in(0,1)$ e qualche $n>0$, sia $G(x-2^{-n})=p$ e $G(x+2^{-n})=1-q$; le considerazioni fatte all'inizio dell'esempio 4 mostrano che $P(N\geq n)\geq(1-p)^n(1-q)^n$ quindi, se $p+q<<1$, risulta piccola la probabilità che il criterio di arresto si verifichi prima di n passi.

Ringraziamenti. L'autore ringrazia il prof. Giovanni Lombardi per aver trovato la relazione ricorrente (7) e reso così possibile la trattazione completa dell'esempio 2. Ringrazia inoltre il dott. Fabio Tardella per la soluzione del problema 2.

Bibliografia

[1] G.B. Wetherill, *Sequential Methods in Statistics*, Methuen 1966

[2] G. Fiorio, *The Random Threshold and the Bisection*, in corso di pubblicazione su Metron (1990?)

[3] F. Tardella, *On the Equivalence between some Discrete and Continuous Optimization Problems*, Proceedings of the Annual Conference AIRO'90 - Models and Methods for Decision Support, pp. 809-819; to appear in Annals of Operations Research 1990.