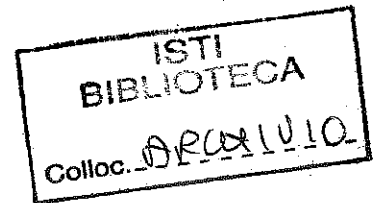


B5-16
2002

Microstructure et modèles continus
en mécanique des matériaux :
des questions d'hier,
quelques contributions pour aujourd'hui,
une proposition pour demain

Mémoire présenté par

Maurizio BROCATO



à l'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
le 25 novembre 2002
pour obtenir l'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
de l'UNIVERSITÉ DE MARNE LA VALLÉE

devant le Jury composé de

- | | |
|---|---|
| M. Michel FRÉMOND
Président et Rapporteur
Directeur des Recherches
(LCPC, Paris) | M. Gianfranco CAPRIZ
Directeur d'Habilitation
Membre de l'Accademia dei Lincei
Professeur Emeritus
(Université de Pise) |
| M. Paolo PODIO-GUIDUGLI
Rapporteur
Professeur
(Université de Rome <i>Tor Vergata</i>) | M. Alain EHLACHER
Professeur
(ENPC, Paris) |
| M. Giuseppe GEYMONAT
Rapporteur hors Jury
Directeur des Recherches
(CNRS, Montpellier) | M. Qi-Chang HE
Professeur
(Université de Marne la Vallée) |



Microstructure et modèles continus
en mécanique des matériaux :
des questions d'hier,
quelques contributions pour aujourd'hui,
une proposition pour demain

Mémoire présenté par

Maurizio BROCATO

à l'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
le 25 novembre 2002
pour obtenir l'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
de l'UNIVERSITÉ DE MARNE LA VALLÉE

devant le Jury composé de

- | | |
|---|---|
| M. Michel FRÉMOND
Président et Rapporteur
Directeur des Recherches
(LCPC, Paris) | M. Gianfranco CAPRIZ
Directeur d'Habilitation
Membre de l' <i>Accademia dei Lincei</i>
Professeur Emeritus
(Université de Pise) |
| M. Paolo PODIO-GUIDUGLI
Rapporteur
Professeur
(Université de Rome <i>Tor Vergata</i>) | M. Alain EHRLACHER
Professeur
(ENPC, Paris) |
| M. Giuseppe GEYMONAT
Rapporteur hors Jury
Directeur des Recherches
(CNRS, Montpellier) | M. Qi-Chang HE
Professeur
(Université de Marne la Vallée) |



Dans beaucoup des cas, en fait, la Nature travaille contre les besoins de l'Homme, parce que elle suit toujours son cours. Alors, lorsqu'il devient nécessaire de faire quelque chose qui dépasse la Nature, les difficultés peuvent être surmontées par le biais de l'art. Mécanique est le nom de l'art qui nous aide contre ces difficultés; comme le poète Antiphone le-dit, « l'Art donne la Victoire qui Nature interdit ».

[Aristote, *Ars Mekanica*]



Remerciements

Je remercie M. Gianfranco Capriz, Directeur de cette Habilitation, pour m'avoir guidé au fil des années après l'obtention du Doctorat. Je souhaite savoir être un jour à la hauteur de son enseignement.

Je remercie les rapporteurs, M. Michel Frémond, Président du Jury, M. Paolo Podio-Guidugli et M. Giuseppe Geymonat, pour le travail qu'ils ont fait sur ce document et pour leur avis favorable à ma candidature.

Je remercie M. Qui-Chang He, pour avoir accepté de faire partie du Jury, dans lequel il a représenté l'Université de Marne la Vallée.

Je remercie spécialement M. Alain Ehrlacher, membre du Jury, mon ancien Directeur de Thèse, qui m'a toujours aidé au cours de ma carrière et qui a encouragé la préparation de ce mémoire.

Je remercie les collègues du Laboratoire Analyse des Matériaux et Identification, unité mixte de l'École Nationale des Ponts et Chaussées et du Laboratoire Centrale des Ponts et Chaussées, pour m'avoir accueilli dans ce Laboratoire au cours de la dernière année, et en particulier M.me Marie Françoise Kaspi qui m'a aidé dans l'organisation de la soutenance.

Je remercie mes amis Philippe, Valerie, Armand, Félix, Louis et Gaspard Tamagny pour m'avoir accueilli dans leur famille lors des mes fréquentes visites à Paris.

Je dédie mon travail à Paola et Alice, ma famille.



Table des matières

Introduction	v
Curriculum vitæ et publications	vii
1 Matériaux polycristallins	1
1.1 Introduction	1
1.1.1 Remarque préliminaire	4
1.2 Polycristal de Cosserat	4
1.2.1 Position du problème – physique du polycristal	5
1.2.2 Équations de bilan pour un milieu des Cosserat	6
1.2.3 Équations de comportement du polycristal	8
1.2.4 Surfaces de singularité	11
1.2.5 Conclusions sur le modèle à la Cosserat	13
1.3 Globalisation	13
1.3.1 Introduction	13
1.3.2 Définition	14
1.3.3 Théorèmes	15
1.3.4 Application	16
1.4 Polycristal dans l'espace profond	18
1.4.1 Cinématique	18
1.4.2 Équations de bilan	19

1.4.3	Comportement	20
1.5	Homogénéisation des polycristaux	21
1.5.1	Distribution des orientations dans les polycristaux	21
1.5.2	Plongement de $SO(3)$ dans \mathbb{R}^5	22
1.5.3	Plongement de $SO(3)$ dans Sym_0	23
2	Matériaux contrôlables	25
2.1	Introduction	25
2.2	Principe de Pontryagin	28
2.2.1	Position du problème	28
2.2.2	Solution par le Principe de Pontryagin	29
2.2.3	Application à l'amortissement	29
2.3	Amortisseur contrôlable	34
2.3.1	Les matériaux électro-rhéologiques	34
2.3.2	Le projet d'un amortisseur électro-élastique	35
2.4	Gyrocontinus	36
2.4.1	Équations de bilan	36
2.4.2	Ondes planes	40
2.4.3	Chaînes gyrocontinues	41
2.4.4	Poutres gyrocontinues	44
2.5	Bâtiments historiques	46
2.5.1	Introduction	46
2.5.2	Le contrôle de la voûte du Salon du <i>Maggior Consiglio</i> dans le Palais Ducal de Gènes	48
3	Questions historiques	63
3.1	Introduction	63
3.2	Molécules et milieu continu	65
3.3	Les relations de Cauchy	67

TABLE DES MATIÈRES

iii

3.3.1	Introduction	67
3.3.2	Le système moléculaire de Cauchy	69
3.3.3	La présentation du sujet faite par de Saint-Venant	72
3.3.4	La contribution de Poincaré à la généralisation du problème	74
3.3.5	Calcul du tenseur d'élasticité	75
3.3.6	Conclusions	79
3.4	Matériaux non simples	81
3.4.1	Le fluide newtonien	81
3.4.2	Les équations de Navier-Stokes	82
3.4.3	Le cristal hétérogène de Cauchy	84
3.4.4	Le fluide de Kleitz	85
3.4.5	Le fluide de Levy	86
3.4.6	Le solide élastique de de Saint-Venant	87
3.5	Conclusions	88
	Bibliographie	97

Introduction

Ce mémoire est écrit pour l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches. Le prochain chapitre contient mon curriculum : études, activités de recherche et d'enseignement, production scientifique.

Dans les chapitres qui suivent je présente mon activité de recherche après l'obtention du titre de docteur de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Cette activité s'est déroulée, toujours en collaboration avec les chercheurs de l'ENPC, d'abord à l'Université de Gènes et ensuite à l'Institut pour l'Élaboration de l'Information du Conseil National des Recherches Italien à Pise.

Mon action de recherche se place dans le cadre de la mécanique des milieux continus, concernant en particulier les structures et les matériaux solides. Ses axes principaux sont orientés vers les techniques de passage micro-macro dans la mécanique des matériaux, vers l'histoire de ce sujet et vers son application au contrôle des systèmes continus et des matériaux dits intelligents.

Dans le Chapitre 1 je présente les lignes principales de recherche que j'ai suivies dans le cadre des passages micro-macro en mécanique. Ce travail, commencé pendant ma thèse de doctorat avec l'étude des déformations plastiques de l'aluminium, a été continué suivant la même ligne d'approche au problème de la plasticité des polycristaux en régime de transformation finie sans négliger les effets d'écroutissage dus à l'évolution de la texture. Bien que particulièrement conçues pour l'étude des déformations plastiques indépendantes du temps, la démarche présentée a de nombreuses applications et prolongements notamment dans le cas d'interactions microscopiques faiblement non-locales entre parties d'un même corps.

Dans le Chapitre 2 je résume les efforts que j'ai conduits dans le domaine des matériaux contrôlables et des systèmes intelligents et automatiques. Ces recherches s'adressent à des problèmes de grande actualité et, vraisemblablement, d'importance fondamentale pour l'avenir. L'emploi de matériaux dont le comportement peut être contrôlé sera de plus en plus intéressant non seulement dans les applications de haute technologie (voir par exemple le projet européen sur le contrôle de forme des ailes d'avions de nouvelle génération), mais aussi dans des situations plus ordinaires. C'est la possibilité de faire appel à des propriétés intégrées de façon robuste dans ces matériaux (comme par exemple pour la réalisation de joints articulés en une seule pièce mécanique) qui explique leur

importance industrielle. Mes études en particulier sont dirigées vers l'obtention d'une méthode générale pour l'optimisation des processus mécaniques suivis par de tels matériaux et vers l'exploitation des propriétés physiques des matériaux électro-rhéologiques. Notamment, c'est en employant des tels matériaux que j'ai conçus et réalisé un système d'amortissement actif de vibrations mécaniques, dont le brevet, actuellement en cours d'extension au Pays de la Communauté Européenne, a été déposé en Italie en juin 1999 par le CNR.

Encore dans la ligne de recherche sur les systèmes contrôlés s'inscrit mon travail sur le monitoring et le contrôle des bâtiments historiques. Il s'agit d'un transfert de technologie vers l'industrie de la conservation de l'héritage culturel dont l'importance en Europe est destinée à augmenter dans les prochaines années. L'intervention directe sur un monument historique étant toujours une opération critique – tant pour le peu d'informations disponibles sur son passé que pour la nature invasive de toute action de réparation ou reconstruction – la mise en place de systèmes de mesure et contrôle automatique devient d'autant plus importante que le niveau de sécurité et confort demandé pour les bâtiments croît. La mise en place d'un tel système demande la résolution de problèmes de mécanique, métrologie, informatique, calcul numérique; l'intersection des compétences de l'ingénieur avec celles de l'historien de l'art, de l'architecte, du géologue et du biologiste est fondamentale pour une approche correcte au problème.

Dans le Chapitre 3 je présente une synthèse des travaux que j'ai rédigés au cours de mon travail post-doc à l'Université de Gènes. L'étude de l'histoire est non seulement formatrice, car elle nous permet l'approfondissement par la lecture des classiques, mais aussi riche de suggestions pour la recherche actuelle. C'est notamment le cas de la longue querelle sur les relations de Cauchy, dont la solution fournit un instrument utile pour les besoins modernes de modélisation continue des systèmes discrets. Le problème de l'écriture de lois de comportement locales ou non locales a aussi son origine historique, notamment dans les travaux de Jacob Bernoulli et de Newton sur le mouvement du tourbillon. Les questions proposées et les choix de modélisation des auteurs du XIX^e siècle demeurent d'actualité.

Curriculum Vitæ et production scientifique

Informations générales

Titres

- 1985 Diplôme d'Ingénieur Civil
 Spécialité : Bâtiment - Structures.
 Délivré par : Faculté d'Ingénierie de l'Université de Catane (Italie).
 Note : 110/110 avec les félicitations du Jury.
- 1987 Diplôme d'Etudes Approfondis en Mécanique Appliquée à la Construc-
 tion
 Option : Génie Civil et Industriel.
 Délivré par : Université *Pierre et Marie Curie* Paris VI et École Natio-
 nale des Ponts et Chaussées.
 Mention : Très bien.
- 1994 Diplôme de Docteur de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.
 Spécialité : Structures et Matériaux
 Mention : Très Honorable avec les félicitations du Jury.
 Thèse : *Un modèle thermo-mécanique de polycristal pour l'étude
 des bandes de cisaillement*

Affiliation

- 1997- Chercheur à l'Institut d'Élaboration de l'Information du Conseil Natio-
 nal des Recherches (IEI-CNR) – Pise (Italie).

Activités de recherche

Organisation de colloques

- 1998 *Second Micro Colloquium Microstructures*
Scuola Normale Superiore - Pise, 29 novembre - 1 décembre.
- 1999 *Third Micro Colloquium Microstructures*
Scuola Normale Superiore - Pise, 1-3 décembre.
- 2000 *Meeting in Memory of Clifford Truesdell*
Consorzio Pise Ricerche - Pise, 19-20 novembre.
- 2001 *Fourth Micro Colloquium Microstructures*
Scuola Normale Superiore - Pise, 14-15 juin

Organisation de projets de recherche

- 1997 | Projet de l'Unité de l'IEI de la « *Rete Policentrica per la Meccanica*
1998 | *Computazionale dei Solidi* » (COMES) du CNR.
1999 | Laboratoire : IEI-CNR.
 Financement : CNR (obtenu).
- 1999 Projet CONFIRM (*Concrete Fire Mechanics*).
 Lab. : 12 laboratoires européens.
 Fin. : *European Science Foundation* (classé 5^e, 3 projets financés).
- 1998 Cours de Formation pour la Recherche Industrielle « *Problemi strutturali*
 e metodi di controllo per la conservazione del patrimonio ambientale e
 culturale ».
 Lab. : IEI-CNR.
 Fin. : Fond Social Européen et Province de Messine (obtenu).
- 2000 Projet de l'Unité de l'IEI « *Controllo e monitoraggio della risposta strut-*
 turale per la salvaguardia dei beni culturali »
 Lab. : IEI-CNR, Université de Rome 3, Polytechnique de Turin.
 Fin. : CNR – Agenzia 2000) (refusé).

- 2001 Projet Confidentiel.
 Lab. : Rodriquez Cantieri Navali.
 Fin. : MIUR (Ministère italien de l'Instruction de l'Université et de la
 Recherche) (demande en cours).
- 2001 Projet Confidentiel.
 Lab. : Piombifera Bresciana.
 Fin. : MIUR (Ministère italien de l'Instruction de l'Université et de la
 Recherche) (demande en cours).
- 2001 Projet Confidentiel.
 Lab. : Usticalines.
 Fin. : MIUR (Ministère italien de l'Instruction de l'Université et de la
 Recherche) (demande en cours).
- 2001 Projet de l'Unité du Département de Mathématique de Pise « *Disordine
 a più livelli e transizione tra livelli di disordine. Modelli matematici per
 sistemi colloidali elettroreologici, cristalli liquidi e materiali granulari* »
 Lab. : Université de Pise et 4 partenaires italiens.
 Fin. : CNR – Agenzia 2001) (demande en cours).
- 2001 Projet de l'Unité de l'IEI « *Modelli ed algoritmi per monitoraggio e con-
 trollo di sistemi strutturali complessi attraverso reti di sensori ed attua-
 tori* »
 Lab. : 6 partenaires italiens.
 Fin. : MIUR – FIRB (*Fondo Infrastrutturale per la Ricerca di Base*)
 (demande en cours).

Participation dans des projets de recherche

- 1987 Contribution à l'élaboration d'un code de calcul pour la modélisation
 numérique de l'emboutissage – Coques minces en flexion linéaire. (Stage
 de DEA).
 Lab. : Régie Nationale Renault - Direction de la Recherche - Service
 Méthodes Emboutissage, Boulogne-Billancourt.
 Fin. : R. N. Renault.

- 1989-94 Etude de l'instabilité plastique et des bandes de cisaillement dans le laminage à froid des alliages Al-Mg. Plasticité en transformation finie des polycristaux et évolution de la texture. (Sujet de Thèse).
 Lab. : Centre des Recherches de Voreppe - Groupe Péciney et Centre d'Enseignement et de Recherche en Analyse des Matériaux - ENPC.
 Fin. : Groupe Péciney et AAENPC.
- 1994-95 Milieux continus avec microstructure.
 Lab. : ENPC-CERAM et Univ. de Pise - Département de Mathématiques.
 Fin. : ENPC.
- 1995 Milieux continus contrôlables.
 Lab. : Univ. de Pise - Dép.t de Mathématiques.
 Fin. : CNR - GNFM (*Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica*).
- 1995-96 Passages micro-macro dans la mécanique des milieux continus. Approche historique.
 Lab. : Univ. de Gènes - Fac. d'Architecture - Institut des Constructions.
 Fin. : Post-Doc. Univ. de Gènes.
- 1996 Essais de laboratoire sur les fluides électro-rhéologiques. Contrôle actif.
 Lab. : ENPC-CERAM.
 Fin. : ENPC.
- 1996 Etude de faisabilité d'un mandrin extractible pour injections plastiques.
 Lab. : ENPC-CERAM.
 Fin. : Sommer-Alliber Industries.
- 1998 | Responsable de l'Unité de l'IEI de la « *Rete Policentrica per la Meccanica*
 1999 | *Computazionale dei Solidi* » (COMES) du CNR.
 2000 | Lab. : IEI-CNR.
 Fin. : CNR.
- 1998-99 Participation au réseau TMR de la Communauté Européenne « *Spatio-temporal instabilities in deformation and fracture* ».
 Lab. : Université Aristote de Salonique (Grèce).
 Fin. : CE.

- 1998- Participation au programme de recherche « *Modelli Matematici per la Scienza dei Materiali* ».
Lab. : Dép.t de Mathématiques - Univ. de Pise.
Fin. : MURST et Univ. de Pise.
- 1999-01 Responsable du Cours de Formation pour la Recherche Industrielle « *Problemi strutturali e metodi di controllo per la conservazione del patrimonio ambientale e culturale* ».
Lab. : IEI-CNR.
Fin. : FSE et Province de Messine.
- 2001- Convention de recherche entre l'IEI, l'ENPC et le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées pour l'étude du collage du béton.
Lab. : ENPC-LAMI.
Fin. : ENPC-LCPC.

Activités d'enseignement

Enseignement

- 1991-92 Responsable du cours « Matériaux de Construction » pour les « Mastère Ouvrages d'Art » et « Mastère Bâtiment ».
Établissement : ENPC.
- 1991-92 | Cour sur l'homogénéisation pour le Doctorat de Recherche en Histoire
1995-96 | des Sciences et des Techniques de la Construction.
1996-97 | Étab. : Univ. de Florence - Fac. d'Architecture - Dép.t des Constructions.
- 1995-96 | Assistant dans le cours « Propriétés Mécaniques des Matériaux »
1996-97 | Étab. : ENPC.
1997-98 |
1998-99 |
- 1997 Assistant dans les cours « Statica I » et « Statica II ».
Étab. : Univ. de Gènes - Fac. d'Architecture.
- 2000-01 Coordinateur de l'enseignement et enseignant dans le Cours de Formation pour la Recherche Industrielle « *Problemi strutturali e metodi di controllo per la conservazione del patrimonio ambientale e culturale* »
Étab. : CNR-IEI.

- 2000-01 | Responsable du cours « Projet de Structures » dans le « Laboratoire de
2001-02 | Construction » de la quatrième année du cours d'études pour l'obtention
du Diplôme d'Architecte.
Étab. : Univ. de Gènes - Dép.t de Science et Technologie de l'Architec-
ture.

Encadrement

- 1996 Stage de DEA : H. Chackar, « Essai de laboratoire sur les matériaux
électro-rhéologiques – amortissement actif »,
DEA « Dynamique des Structures et Couplages »,
Université Paris VI et ENPC.
Étab. : ENPC-CERAM.
- 1997 Thèses pour l'obtention du Diplôme d'Architecte : M. Mauro, A. Cumin,
F. Portella, P. Serra.
Étab. : Univ. de Gènes - Fac. d'Architecture.
- 1998-99 Thèse pour l'obtention du Diplôme d'Ingénieur : R. Gabbrielli.
Étab. : Univ. de Pise - Fac. d'Ingénierie.
- 1998-99 Thèse pour l'obtention du Diplôme ès Sciences Mathématiques : V. degli
Azzoni.
Étab. : Univ. de Pise - Fac. des Sciences.
- 2000 Stage de DEA : Wu Ze Yi, « Compression simple d'un polycristal –
Evolution d'une fonction de distribution des orientations planes »,
DEA « Solides, Structures et Systèmes Mécaniques »,
Université Paris VI et ENPC.
Étab. : ENPC-CERMMO.
- 2000 Stage concluant : A. De Domenico, M. P. Speciale, F. Zanghì,
Cours de Formation pour la Recherche Industrielle « Problemi strutturali
e metodi di controllo per la conservazione del patrimonio ambientale e
culturale ».
Étab. : IEI-CNR.

Production Scientifique

Thèse de Doctorat

- [1] Un modèle thermo-mécanique de polycristal pour l'étude des bandes de cisaillement. École Nationale des Ponts et Chaussées, 14/1/1994, 94/-ENPC/9405 Th. nouv. rég. : structures et matériaux, Atelier National de Reproduction des Thèses, Grenoble.

Brevets

- [2] Method of active control of vibrations by means of electrorheologic material and damping device that carries out this method. Titulaire : Consiglio Nazionale delle Ricerche. Inventeur : M. Brocato. Office européen des brevets, brevet n. 00113860.1-2312 priorité IT/30.6.99/IT PI990040.

Livres

- [3] M. B., Un modèle mécanique de polycristal, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1996.

Articles sur revues et contributions à des ouvrages

- [4] M. B., Ph. Tamagny, A. Ehrlacher, A two dimensional polycrystal model in a deep space representation. *Meccanica*, 30: 641-663, 1995.
- [5] M. B., Ph. Tamagny, A. Ehrlacher, Focal-shift and polycrystal models from the continuum with microstructure to a deep continuum. In *Applied Sciences-Especially Mathematics*, ZAMM - Z. angew. Math. Mech., 76 (S4): 117-120, 1996.
- [6] A. Ehrlacher, Ph. Tamagny, M. B., Change of scale in media with microstructure. In *Geometry, Continua and Microstructure*, G. A. Maugin Ed., Hermann, Paris, pp. 131-143, 1999.
- [7] M. B., A. Ehrlacher, Ph. Tamagny, On dissipation and stability of grains' boundaries in polycrystals. *J. Mech. Behav. Mater.*, 11 (1-3): 17-22, 2000.
- [8] M. B., A. Ehrlacher, Ph. Tamagny, Application of the Theory of Cosserat Media to the Elasto-plastic Behaviour of Polycrystals. In *Continuum Thermomechanics : The Art and Science of Modelling Matter's Behaviour (Paul Germain's Anniversary Volume)*, G. A. Maugin, R. Drouot, F. Sidoroff Ed.s, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, pp. 43-54, 2000.
- [9] M. B., G. Capriz, Gyrocontinua. *Int. J. Solids Structures*, 38 (6-7): 1089-1103, 2001.
- [10] M. B., A. Ehrlacher, Ph. Tamagny, Texture evolution and rotational hardening in multiple slip plasticity – a two dimensional study. *European J. Mech. A/solids*, 20 (3): 345-365, 2001.

- [11] M. B., Tensors and Quaternions in Continuum Mechanics. In *Geometry and Mechanics*, P. Freguglia Ed., Quattroventi, Urbino, pp. 139-153, en cours d'impression.
- [12] M. B., G. Capriz, Polycrystalline Microstructure. In *Proc. Int. Conf. Geometry, Continua and Microstructure*, Torino (Italie), 26-28/10/2000, en cours d'impression dans *Rendiconti del Seminario Matematico Univ. e Polit. di Torino*, vol. 58 (1) (imprimé dans *Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, Sezione di Fisica Matematica*, 4.84.1318 - Maggio 2001).
- [13] M. B., A. De Domenico, F. Zanghì, Structural control of a masonry vault. *Struct. Multidisciplinary Opt.* en cours d'impression.

Comptes rendus aux Académies des Sciences

- [14] M. B., Sulle relazioni di Cauchy. Dal sistema discreto di particelle al continuo equivalente. *Atti della Accademia Ligure di Scienze e Lettere*, Genova, vol. LII (1995): 193-213, 1996.
- [15] M. B., Note storiche e spunti per lo studio del comportamento elastico lineare d'un sistema di particelle visto come un mezzo continuo. *Atti della Accademia Ligure di Scienze e Lettere*, Genova, vol. LIII (1996): 87-108, 1997.
- [16] M. B., A. Ehrlacher, Ph. Tamagny, Description eulerienne de la mécanique d'un front de discontinuité avec apparition d'une localisation de la déformation. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 326, Série II b: 693-698, 1998.
- [17] M. B., A. Ehrlacher, Ph. Tamagny, Détermination de la dissipation caractéristique dans la propagation d'un front de recristallisation. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 327, Série II b: 179-184, 1999.

Articles dans des actes de congrès

- [18] M. B., G. Capriz, Sui continui controllati. In *Atti XII Convegno Nazionale dell'AIMETA*, Napoli (Italie) 3-6/10/1995, Vol. 5, pp. 81-86, 1995.
- [19] M. B., Ph. Tamagny, A. Ehrlacher, Cinematica dei continui eterogenei. In *Atti XII Convegno Nazionale dell'AIMETA*, Napoli (Italie) 3-6/10/1995, Vol. 5, pp. 105-110, 1995.
- [20] M. B., Bodies with controllable constitutive laws—some mathematical issues for active optimisation. In *Third International Conference on Intelligent Materials and Third European Conference on Smart Structures and Materials*, P. F. Gobin, J. Tatibouët Ed.s, Proc. SPIE 2779, pp. 891-896, 1996.
- [21] M. B., Reviewing the molecular theory of elasticity about the problem of Cauchy's symmetry relations. In *Analyse multiéchelle et systèmes physiques couplés, Actes du Symposium Saint-Venant*, Paris (France) 28-29/8/1997, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, pp. 403-410, 1997.

- [22] M. B., Ph. Tamagny, Discontinuity waves in a continuum with lattice microstructure. In *Proc. of the Fourth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, Colorado School of Mines, Golden (Colorado USA) 1-5/6/1998.
- [23] M. B., G. Capriz, Girocontinui. In *Atti IV Congresso Nazionale della Società Italiana di Matematica Applicata ed Industriale (SIMAI 98)*, Giardini-Naxos (Italie) 1-5/6/1998, pp. 356-358, 1998.
- [24] M. B., G. Capriz, Gyrocontinua as smart composites. In *Proc. of ICCE/5 Fifth International Conference on Composite Engineering*, Las Vegas (Nevada USA) 5-11/7/1998, D. Hui Ed., pp. 117-118, 1998.
- [25] M. B., E. C. Aifantis, A theory of plasticity based on globalisation of microscopic constitutive assumptions. In *Constitutive and damage modeling of inelastic deformation and phase transformation Proc. of Plasticity'99: The Seventh International Symposium on Plasticity and Its Current Applications*, Cancun (Mexico), 5-13/1/1999, A. S. Khan Ed., Neat Press, Fulton (Mariland USA), pp. 701-704, 1999.
- [26] M. B., A. Ehrlacher, Ph. Tamagny, Stability of discontinuities in polycrystals. In *Proc. "WASCOM 99" 10th Conference on Waves and Stability in Continuous Media*, Vulcano (Italie), 7-12/6/1999, V. Ciancio, A. Donato, F. Oliveri, S. Rionero Ed.s, World Scientific, Singapore, pp. 57-65, 2001.
- [27] M. B., G. Capriz, Spin fluids and hyperfluids. In *Congresso Nazionale dell'Associazione Italiana di Meccanica Teorica ed Applicata (AIMETA)*, Como (Italie) 5-8/10/1999, imprimé sur CD-ROM (imprimé dans Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, Sezione di Fisica Matematica, 4.83.1313 - Feb. 2001).
- [28] M. B., G. Capriz, Bodies grow smartly. In *Atti V Congresso Nazionale della Società Italiana di Matematica Applicata ed Industriale (SIMAI 2000)*, Ischia Porto (Italie) 5-9/6/2000, pp. 304-307, 2000.
- [29] M. B., A. Ehrlacher, Ph. Tamagny, Continua with multiple slip microstructure. In *Plastic and viscoplastic response of materials and metal forming Proc. of The Eighth International Symposium on Plasticity and Its Current Applications*, Whistler Resort (Canada), 17-22/7/2000, A. S. Khan, H. Zhang, Y. Yuan Ed.s, Neat Press, Fulton (Mariland USA), pp. 519-521, 2000.
- [30] M. P. Speciale, M. B., Layered heterogeneous damageable continua – a mathematical model of sedimentary soils. In *Proc. Int. Conf. on Mathematical Models for Soils Mechanics*, Scilla (Italie), 19-22/9/2000, en cours d'impression.
- [31] M. B., A. Ehrlacher, Ph. Tamagny, Moving boundaries in polycrystals—lattice curvature effects. In *Proc. Moving Boundaries 2001*, Lemnos (Grèce), 9-11/5/2001, C. A. Brebbia Ed., WIT Press, Southampton, 2001.
- [32] M. B., A. De Domenico, F. Zanghì, Feedback control of a masonry vault. In *Proc. STREMAH 2001 Structural Studies, Repairs and Maintenance of Historical Buildings*, Bologna (Italie), 28-30/5/2001, C. A. Brebbia Ed., WIT Press, Southampton, pp. 371-379, 2001.
- [33] M. B., G. Capriz, Multifield and multivariable theories: a synthesis. In *AIMETA '01 - 15th AIMETA Congress of Theoretical and Applied Mechanics - Taormina (Italie)*, 26-29/9/2001, G. Augusti, P. M. Mariano, V.

Sepe, M. Lacagnina Ed.s, *Università di Catania*, p. MS-MUF-08 (et sur CD-ROM), 2001.

- [34] M. B., F. Zanghì, Numerical evaluation of the synthesis control function for an actively reinforced masonry vault. In *First Albert Caquot Int. Conf. – Modelling and simulation in civil engineering: from practice to theory* – Paris, 3-5 oct. 2001, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, p. 84 (et sur CD-ROM), 2001. .

Articles de vulgarisation

- [35] M. B., Control theory and electroelasticity : realisation of an active damper. *ERCIM News*, 38: 24-25, 1999.
- [36] M. B., E. Dudnikov, Control algorithms for electroelastic damping. *ERCIM News*, 40: 22, 2000.
- [37] M. B., Structural Health Monitoring of Ancient Buildings. *ERCIM News*, 42: 51, 2000.

Rapports de recherche, rapports techniques et notes de cours

- [38] M. B., Contribution à l'élaboration d'un code de calcul pour la modélisation numérique de l'emboutissage - Coques minces en flexion linéaire, Rapport de DEA, CERAM-ENPC, 22/6/1987.
- [39] M. B., Notes du cours Matériaux de Construction, pour le Master Ouvrages d'Art et le Master Bâtiment, Rapport Interne CERAM-ENPC, 1992.
- [40] M. B., Note dal micro al macro, per studenti del Dottorato di Ricerca in Storia delle Scienze e delle Tecniche delle Costruzioni, Università di Firenze, 1992.
- [41] M. B., G. Capriz, Sui Continui Controllati, Nota Interna Istituto di Elaborazione della Informazione del Consiglio Nazionale delle Ricerche B4-32 sett. 1995.
- [42] M. B., Notes pour le cours Propriété Mécaniques des Matériaux, Rapport Interne CERAM-ENPC 12, 19/2/1996.
- [43] M. B., Nuove note dal micro al macro, per studenti del Dottorato di Ricerca in Storia delle Scienze e delle Tecniche delle Costruzioni, Università di Firenze, 1996.
- [44] M. B., J.-F. Caron, A. Ehrlacher, Ph. Tamagny, Etude de faisabilité d'un mandrin extractible soumis à des gradients de pression et de température, Rapport Interne (confidentiel) CERAM-ENPC, 1996.
- [45] M. B., Notes pour le cours Propriété Mécaniques des Matériaux, Rapport Interne CERAM-ENPC, 1997.
- [46] M. B. Note sull'omogeneizzazione, per studenti del Dottorato di Ricerca in Storia delle Scienze e delle Tecniche delle Costruzioni, Università di Firenze, 1997.

- [47] M. P. Speciale, M. B., Layered Materials, Tech. Rep. Istituto di Elaborazione della Informazione del Consiglio Nazionale delle Ricerche, IEI-2001-TR-06.
- [48] M. B., L. Nicotra, Realizzazione di un ammortizzatore attivo elettroelastico, Nota Interna Istituto di Elaborazione della Informazione del Consiglio Nazionale delle Ricerche, B4-05 feb-2001.
- [49] M. B., A. De Domenico, F. Zanghì, Feedback control of a masonry vault, Tech. Rep. Istituto di Elaborazione della Informazione del Consiglio Nazionale delle Ricerche, IEI-2001-TR-11.

Séminaires

- [i] Un modello bidimensionale di policristallo. Univ. Pisa (Italie), Dipartimento di Matematica, 19/5/1994.
- [ii] Modello di policristallo a due dimensioni. Univ. Ancona (Italie), Dipartimento di Meccanica 3/5/1995.
- [iii] Matériaux Contrôlables. ENPC-CERAM, Noisy-le-Grand (France) 9/12/1996.
- [iv] Rappresentazione dei continui con microstruttura nello spazio profondo. Univ. della Calabria, Istituto di Meccanica delle Strutture, Cosenza (Italie), 11/3/1996.
- [v] On polycrystal models. Univ. Aristote de Salonique (Grèce), 26/6/1998.
- [vi] Cauchy's molecular theories of elasticity. Univ. Rome 3, Dipartimento di Scienze dell'Ingegneria Civile, Rome (Italie), 3/11/1999.
- [vii] Application du modèle des Cosserat aux évolutions plastiques des polycristaux : texturation, écrouissage par rotation, croissance des grains. CEA Saclay (France), 5/7/2001.
- [viii] Le equazioni di equilibrio e la teoria molecolare dell'elasticità di Cauchy. Seminario Matematico dell'Università di Brescia, Brescia (Italie) 23/1/2001.

Communications

- [ix] Voir [4]. EUROMECH Colloquium 321 *Microstructures and phase changes in solids*, Udine (Italie), 27-30/5/1994.
- [x] Voir [5]. SIAM 4th International Conference on Industrial and Applied Mathematics, Hambourg (RFA), 4-7/7/1995.
- [xi] Controllable Materials. EUROMECH Colloquium 341 *Smart Materials and Structures*, Giens (France), 26-28/9/1995.
- [xii] Voir [18] et [19]. AIMETA '95 : XII Convegno Nazionale dell'Associazione Italiana di Meccanica Teorica ed Applicata, Naples (Italie), 3-6/10/1995.
- [xiii] Voir [20]. ICIM : 3rd International Conference on Intelligent Materials - 3rd European Conference on Smart Structure and Materials, Lyon (France), 3-5/6/1996.

- [xiv] Les rapports entre la science et la technique dans le savoir proto-encyclopédique des *Mathesis Universalis* entre le XVI^e et le XVIII^e siècle (avec A. Mastrorilli, O. Pedemonte). XXth International Congress of History of Science, Liège (Belgique), 20-26/7/1997.
- [xv] (Présenté par E. Benvenuto) A note on the first attempts to write non-local constitutive equations (avec A. Mastrorilli). *Entre Mécanique et Architecture IV – Saint Venant*, Louvain-la-Neuve (Belgique), 28-29/7/-1997.
- [xvi] A thermo-mechanical study of the stability of grains' boundaries in polycrystals (avec A. Ehrlacher, Ph. Tamagny). 3rd Euromech Solid Mechanics Conference, Stockholm (Suède), 18-22/8/1997.
- [xvii] Voir [21]. Symposium Saint-Venant – Analyse multiéchelle et systèmes physiques couplés, Paris (France), 28-29/8/1997.
- [xviii] Voir [7]. Equations of balance and a criterion for the stability of a grain boundary in a polycrystal modeled as a continuum with microstructure (avec A. Ehrlacher, Ph. Tamagny). 2nd Euroconference and International Symposium on Material Instabilities in Deformation and Fracture, Salonique (Grèce), 31/8-4/9/1997.
- [xix] Voir [6] (présenté par A. Ehrlacher). *Séminaire de Géométrie*, Fakultät für Mathematik und Informatik, Universität Mannheim (RFA), 26/11/1997.
- [xx] Voir [23] SIMAI '98 : IV Congresso Nazionale della Società Italiana di Matematica Applicata ed Industriale, Giardini-Naxos (Italie) 1-5/6/1998.
- [xxi] Voir [24] ICCE5 : 5th International Conference on Composite Engineering, Las Vegas (Nevada, USA) 5-11/7/1998.
- [xxii] Globalisation of microscopic plasticity equations. REVISIA (Reactor Vessel Integrity in Severe Accidents) Meeting Gradient Theories in Viscoplasticity and Failure Modelling, Aristotle University of Thessaloniki, Salonique (Grèce) 5-6/11/1998.
- [xxiii] Voir [25] (présenté par E. C. Aifantis). Plasticity '99 : The Seventh International Symposium on Plasticity and Its Current Applications, Cancun (Mexique), 5-13/1/1999.
- [xxiv] Globalisation of microscopic plasticity (avec E. C. Aifantis). Mid-Term Review Meeting TMR Network *Spatio-Temporal Instabilities in Deformation and Fracture: Mechanics, Materials Science and Nonlinear Physics Aspects*, Aristotle University of Thessaloniki, Salonique (Grèce), 6-1/5/-1999.
- [xxv] Voir [26]. WASCOM '99 : 10th International Conference on Waves and Stability in Continuous Media, Vulcano (Italie) 7-12/6/1999.
- [xxvi] Voir [27]. AIMETA '99: XIV Convegno Nazionale dell'Associazione Italiana di Meccanica Teorica ed Applicata, Como (Italie) 5-8/10/1999.
- [xxvii] On the first attempts to write non-local constitutive equations (avec A. Mastrorilli). Third Micro Colloquium Microstructures, Pise (Italie) 1-3/-12/1999.
- [xxviii] Rapporto di attività 1999. Progetto Cofin98 MURST Modelli Matematici per la Scienza dei Materiali, Bressanone (Italie), 25-28/1/2000.

- [xxix] Voir [28]. SIMAI 2000 : V Congresso Nazionale della Società Italiana di Matematica Applicata ed Industriale, Ischia Porto (Italie) 5-9/6/2000.
- [xxx] Voir [29] Plasticity 2000 : The Eighth International Symposium on Plasticity and Its Current Applications, Whistler Resort (Canada), 17-2/7/2000.
- [xxxi] Voir [30] (présenté par M. P. Speciale). International Conference on Mathematical Models for Soils Mechanics, Scilla (Italie), 19-22/9/2000.
- [xxxii] Monitoraggio e prevenzione. Un esempio di controllo della funzione strutturale. Le Mura di Lucca. Dal restauro alla manutenzione programmata, Lucca (Italie), 17-19/5/2001.
- [xxxiii] (Présenté par M. P. Speciale) Elastic waves in materials with thin layers (avec M. P. Speciale). WASCOS 2001 : 11th Conference on Waves and Stability in Continuous Media, Porto Ercole (Italie), 3-9/6/2001.
- [xxxiv] (Présenté par M. P. Speciale) Masonry Microstructure (avec M. P. Speciale). Fourth Micro Colloquium Microstructures, Pise (Italie), 14-15/6/2001.
- [xxxv] Distributed control for the heavy chain (avec G. Capriz). (Présenté par G. Capriz) Multivariable theories versus (or cum) multifield theories (avec G. Capriz). APM 2001 : XXIX Summer School Advanced Problems in Mechanics, St. Petersburg (Russie), 21-30/6/2001.
- [xxxvi] Sulla non-località debole (avec G. Capriz). Incontro Scientifico Modelli Matematici e Problemi Analitici per Materiali Speciali (coord. M. Fabrizio, G. A. Hanyga, A. Morro), Cortona (Italie), 25-29/6/2001.
- [xxxvii] (Présenté par Ph. Tamagny) Texture evolution of continua with single crystal microstructure (avec Ph. Tamagny, A. Ehrlacher, Z. Y. Wu). MMSC '01 : 2001 Mechanics and Materials Summer Conference (Symposium on Current Development in Micromechanics of Random Heterogeneous Materials and Bodies), S. Diego (Californie USA), 27-29/6/2001.
- [xxxviii] Voir [33]. AIMETA '01: XV Convegno Nazionale dell'Associazione Italiana di Meccanica Teorica ed Applicata, Taormina (Italie), 26-29/9/2001.
- [xxxix] Voir [34]. Première Conférence Internationale Albert Caquot *Modélisation et simulation en génie civil: de la pratique à la théorie*, Paris (France) 3-5/10/2001.
- [xl] (Présenté par G. Napoli) Le relazioni di Cauchy (avec G. Napoli). Incontro Scientifico di medio termine – Progetto Cofin 2000 MURST *Modelli Matematici per la Scienza dei Materiali*, Bressanone (Italie), 13-15/12/2001.

Chapitre 1

Contributions à l'étude des matériaux à microstructure polycristalline

1.1 Introduction

Au cours de ma thèse pour l'obtention du titre de Docteur de l'École Nationale des Ponts et Chaussées (*cf.* [1]¹) j'ai étudié les grandes déformations plastiques des métaux, et en particulier le problème de l'apparition des bandes de cisaillement lors du laminage à froid des alliages Al-Mg. L'objectif de la thèse était la proposition d'un modèle mécanique de polycristal approprié pour le problème cité. La démarche suivie pour obtenir ce modèle fut de nature déductive, s'appuyant sur la connaissance de phénomènes physiques observables à une échelle géométrique inférieure à celle caractéristique du modèle : une approche par passage micro-macro.

Le passage micro-macro pour les matériaux à comportement hétérogène non linéaire et anisotrope, tels que les polycristaux, pose des questions délicates. Lorsque le comportement est linéaire il est possible de considérer les déplacements solutions du problème macroscopique et homogène comme des moyennes d'ensemble des déplacements microscopiques et les champs différence entre micro et macro comme des « *perturbations* » par rapport à la moyenne. Ces perturbations, par conséquence de la linéarité du problème seront, elles-aussi, solution d'un problème de minimisation. Si le comportement est non linéaire cette dernière propriété ne peut pas être invoquée.

L'anisotropie introduit le besoin d'un repère matériel pour la description du comportement. La définition d'un élément de matière homogène équivalent –

¹Les références bibliographiques en italique sont relatives aux publications figurantes dans la liste donnée de la page xiii à la page xvii.

en un sens à préciser – à une population d'objets munis d'un repère peut s'appuyer sur le concept de plongement d'une variété différentielle (celle des objets) dans un espace linéaire. Lorsque le sens à donner à l'équivalence micro-macro est énergétique (ce qui est parfaitement légitime et physiquement significatif en hyperélasticité), le plongement se fait dans l'espace linéaire des tenseurs de raideur et sa signification physique ne pose aucune ambiguïté : il existe une relation bijective entre objets dans la population étudiée et tenseurs de raideur dans un espace linéaire de dimension (au plus) 21. Mais il n'en est pas ainsi si le comportement est dissipatif, d'autant plus que la plasticité introduit des relations non-holonômes : on doit alors raisonner en regardant les objets cités comme des solides linéaires de comparaison et admettre que l'élément homogène équivalent dépend de la direction du processus.

Considérons la physique de la déformation plastique dans les métaux à des températures inférieures au tiers de la température de fusion. Plaçons-nous à une échelle suffisamment grande par rapport à celle caractéristique des dislocations, mais petite par rapport aux dimensions géométriques typiques, par exemple, des processus de mise en forme ⁽²⁾. Dans ces conditions le métal peut être décrit comment un polycristal : un agrégat cohérent de grains monocristallins, à l'intérieur desquels on considère toujours possible l'identification d'un réseau cristallin. L'interface entre deux grains est de mesure volumique souvent négligeable par rapport aux dimensions des grains, par conséquent on la décrit géométriquement avec une bonne approximation comme une surface.

Dans une configuration déformée du polycristal le réseau cristallin peut être déformé (de façon continue bien que éventuellement non uniforme) à l'intérieur des grains, l'interface entre grains pouvant être vue comment une discontinuité d'ordre zéro du champ décrivant l'orientation cristallographique dans l'agrégat. (Des observations d'échantillons d'acier soumis à une déformation à l'intérieur d'un MEB, après que leur surface avait été imprimée avec un grillage carré suffisamment serré par rapport à la taille moyenne des grains, supportent ces affirmations qui ne visent qu'à fixer un schéma simplifié de la physique du polycristal ; cf. [57] ³).

Si l'on considère un élément de matière du polycristal, suffisamment grand pour contenir un ensemble statistiquement représentatif de grains, mais assez petit par rapport à la plus petite longueur d'onde estimée significative des champs contrôlés au bord (ce qui rendrait légitime, par exemple, une hypothèse de vitesse de déformation homogène ou de contrainte homogène dans l'élément pour en déduire un comportement homogène approché), on peut imaginer (et, de fait, vérifier expérimentalement) que les contraintes et les taux de déformation à l'intérieur des grains dans l'élément dépendent premièrement de l'orientation cristalline locale. On s'attend que, à l'intérieur d'un élément de matière de telle taille, deux monocristaux dont les réseaux cristallins aient la même orientation se trouvent (à peu près) dans le même état de contrainte, quelle que soit

²Dans tout ce document on regarde comme grande la plus petite échelle géométrique typique des structures du génie civil et industriel – épaisseur des parois des poutres, épaisseur des tôles, par exemple – et comme petite l'échelle des grains métalliques ; on se place donc dans la plage entre 1 mm et 1 μ m environs

³Les références imprimés avec caractères ordinaires sont relatives à la Bibliographie donnée à la fin du texte.

leur position dans l'élément. Par ailleurs on s'attend que deux monocristaux, éventuellement voisins – voir contigus, mais ayant leurs réseaux cristallins diversement orientés se trouvent dans des états de contrainte différents.

Est-ce suffisant pour voir l'orientation du réseau cristallin comme une variable cinématique jouant le même rôle que la position des éléments matériels dans l'espace euclidien? C'est en tout cas l'hypothèse de départ de la modélisation proposée en [1, 3, 4]; sa pertinence est liée à une vision dûment simplifiée de la physique du polycristal, sa validité est à tester par les résultats qui peuvent être ainsi obtenus, son opportunité peut être justifiée moyennant un ensemble de relations, non ambiguës, entre les grandeurs que l'on introduit dans le modèle et des grandeurs physiques connues. Ces relations ont été établies moyennant un modèle de polycristal à la Cosserat (cf. [8, 29]) et par un passage micro-macro approprié (cf. [1, 3, 5, 6], cf. [95]).

Ainsi l'étude des déformations plastiques finies des polycristaux conduit à des réflexions qui sortent du cadre donné par ce cas particulier, donnant un exemple concret pour une modélisation non classique en mécanique des milieux continus. Du point de vue physique on peut noter que, au moins à petite échelle, on est amené à considérer qu'il existe des interactions entre monocristaux non voisins : la population de monocristaux se trouvant à l'intérieur du petit élément de matière interagit en raison des désorientations des axes cristallographiques plus que des distances dans l'espace euclidien. On peut classer un tel comportement comme « *faiblement non local* » (cf. [17]). Pour traiter ce genre de situations on a recours à une théorie « *multi-variables* » : la physique est décrite dans un univers d'observations ayant plus de dimensions que l'espace-temps habituel; des interactions plus complexes résultant par dualité.

Notons qu'une théorie multi-variables est différente des théories « *multi-champs* » (comme par exemple les milieux des Cosserat) : dans ces dernières on munit les éléments matériels de plus de degrés de liberté cinématique par rapport au cas classique des milieux de Cauchy, mais l'hypothèse fondamentale par laquelle on identifie ces éléments par leurs positions dans l'espace euclidien perdure.

Au cours des années j'ai poursuivie l'étude des polycristaux, en les organisant autour de trois questions principales :

- la nature du passage micro-macro,
- le modèle microscopique de polycristal à adopter comme point de départ du dit passage, et en particulier :
 - les équations de bilan et constitutives,
 - les conditions d'équilibre et de mouvement des interfaces entre grains dans le modèle microscopique.

Les résultats ont été présentés dans les publications figurantes dans la liste donnée à la p. xiii et suiv. : [3] (le modèle de polycristal objet de la thèse), [4] (un exemple en deux dimensions), [19] (les hypothèses cinématiques fondamentales du modèle), [5, 6, 12, 33] (le passage micro-macro), [25] (un choix particulier de lois de comportement), [8, 10, 29] (le modèle microscopique à la Cosserat), [7, 26, 16, 17, 22, 31] (l'étude des surfaces des grains).

Le modèle proposé dans [1, 3] pour l'étude des déformation plastiques finies

de polycristaux sera présenté dans les paragraphes suivants. En particulier dans §1.2 on introduit un modèle multi-champs de polycristal. Dans §1.3, on considère une transformation intégrale qui permet une approche systématique du problème du passage à des modèles multi-variables et, dans §1.4, on présente le modèle ainsi obtenu pour les polycristaux, avec des exemples permettant des calculs explicites.

Un plongement de $SO(3)$ (la variété différentielle dans laquelle on représente les monocristaux) dans un espace linéaire, prémisses nécessaires pour l'homogénéisation des polycristaux en théorie multi-champs, est présentée au §1.5.

1.1.1 Remarque préliminaire

Dans l'ensemble de ce chapitre on considère des descriptions mécaniques des polycristaux prenant en compte la rotation des directions cristallographiques. On doit alors se servir d'une représentation convenable des rotations.

On note $\mathcal{M} \subseteq SO(3)$ la variété des microstructures, qui sera un sous-groupe – éventuellement propre – des rotations de l'espace euclidien. $\mathcal{T}_\nu(\mathcal{M})$ est l'espace tangent au point $\nu \in \mathcal{M}$, $\mathcal{T}_\nu^*(\mathcal{M})$ l'espace cotangent au même point.

On représentera \mathcal{M} par une carte \mathbf{R} dans $Orth^+$, le groupe des tenseurs orthogonaux propres ; on notera $\mathbf{R}(\nu)$ l'image de ν dans $Orth^+$. Pour abrégier les notations on écrira $\mathbf{N} := \mathbf{R}(\nu)$ et $\mathbf{M} := \mathbf{R}(\mu)$.

Grâce à la propriété transitive des rotations l'espace tangent $\mathcal{T}_\nu(\mathcal{M})$ pourra être représenté moyennant l'espace tangent à la rotation identique $\mathcal{T}_{\mathbf{I}}(Orth^+) \equiv \mathcal{T}_{\mathbf{I}}^*(Orth^+) \equiv Skw$ par $\mathcal{T}_{\mathbf{R}(\nu)}(Orth^+) \equiv \mathcal{R}_{\mathbf{N}} Skw \equiv \{\mathbf{Y} \mid \mathbf{Y}\mathbf{N}^T \in Skw\} \equiv \mathcal{L}_{\mathbf{N}} Skw \equiv \{\mathbf{Y} \mid \mathbf{N}^T \mathbf{Y} \in Skw\}$.

1.2 Modèle de polycristal à la Cosserat

Le premier pas dans un passage micro-macro est une modélisation microscopique du phénomène. Dans le cas présent notre point de départ est un modèle de polycristal suivant la théorie des Cosserat [22], qui a été présenté dans [8, 29] ⁽⁴⁾.

On considère un corps matériel dont les éléments sont munis d'une structure géométrique microscopique, par exemple les directions cristallographiques. Ces éléments matériels peuvent être étudiés comme des systèmes lagrangiens ayant les trois degrés de liberté des points de l'espace euclidien plus les degrés de liberté de leur microstructure. Si le réseaux cristallographique en tout point d'un polycristal n'est pas modifié par le processus de déformation (ce qui est une hypothèse fort simple, mais courante en plasticité par glissement multiple), ses

⁴Le sujet présenté dans ce paragraphe fait l'objet des publications figurantes dans la liste donnée à la p. xiii et suiv. avec les numéros [7, 8, 26, 10, 16, 17, 22, 29, 31].

évolutions peuvent être représentées par une rotation par rapport à un réseau de référence. L'étude mécanique des polycristaux peut donc faire appel à la théorie des milieux de Cosserat.

1.2.1 Position du problème – physique du polycristal

Le polycristal est un modèle souvent utilisé pour l'étude des déformations plastiques des métaux. Ce modèle est dans la plus part des cas construit faisant appel à la théorie de Cauchy des milieux continus avec des variables internes qui représentent la structure cristalline (*cf.* par exemple [89, 47, 63]); moins fréquent est le recours à la théorie des milieux continus avec microstructure (*cf.* [39, 16]) ou, plus précisément, à la théorie des frères Cosserat.

Dans ce cas on considère les éléments matériels d'un milieu continu placés dans l'espace euclidien et munis de la microstructure d'un cristal. En plus des trois coordonnées de position usuelles on a besoin d'un nombre minimal de coordonnées lagrangiennes pour décrire cette microstructure. Par conséquent un champ inconnu de vitesse de microstructure entre en jeu et enrichit la description faite par la simple donnée du champ de vitesse de translation macroscopique.

Nous adoptons le point de vue de la plasticité par glissement multiple (par exemple *cf.* [62, 46]) pour la définition d'un modèle de polycristal basé sur la théorie des Cosserat. Dans le paragraphe suivant on montrera les équations du modèle.

Selon la théorie du glissement multiple, l'écoulement plastique suit, dans les cristaux, des directions cristallographiques privilégiées. Bien que la déformation plastique en général modifie les défauts d'empilement du réseau cristallin, on imagine habituellement que ces défauts ne sont pas visibles à l'échelle caractéristique des processus macroscopiques, de sorte que les plans et les directions de glissement peuvent être vus comme non influencés par l'écoulement plastique.

Donc, en prenant un réseau cristallin parfait de référence, tout élément matériel du polycristal sera supposé avoir à tout instant et à une rotation près le même ensemble de systèmes de glissement, au moins à la suite d'un processus de décharge réversible adéquat (un processus idéal qui ramène localement le réseau cristallin à son état naturel et qu'il convient de considérer d'élongation pure pour éliminer le caractère arbitraire de la rotation pendant la décharge). Plus précisément, suivant l'approche classique de Mandel, on fera appel à la notion de trièdre directeur et de taux de rotation plastique (*cf.* [63, 64]).

Dans un cristal parfait, si on adopte le point de vue idéal de la plasticité par glissement multiple, il existe un repère privilégié pour la description du comportement : le trièdre directeur de Mandel. Dans le repère directeur le réseau cristallin est décrit par une liste donnée de paramètres qui, par l'hypothèse du glissement multiple, ne changent pas au cours de tout processus de déformation plastique. Les symétries cristallographiques peuvent engendrer l'existence de classes de repères équivalents pour la description du réseau, mais il faut prendre garde à l'évolution des propriétés mécaniques du réseau cristallin qui, souvent, détruit

ces symétries. (L'écroûissage des systèmes de glissement ne suit pas, en général, les symétries du réseau).

Pour la description constitutive d'un polycristal il est utile de se référer à un tel repère (en chaque point du corps). Par conséquent l'introduction d'une décomposition adéquate du gradient de la transformation sera nécessaire : les propriétés matérielles dans tout emplacement réel du polycristal dérivent d'une structure cristallographique qui a subi des rotations et des élongations réversibles par rapport à son état initial de référence ; de leur coté les éléments matériels qui contiennent cette structure ont subi aussi une déformation plastique qui ne serait pas lisible sur le réseau cristallin.

Pour éviter toute ambiguïté qui pourrait être introduite par la présence de tenseurs d'ordre trois, dans la suite de ce chapitre on utilisera souvent une double notation, intrinsèque et tensorielle. Dans cette dernière notation les caractères grecques représenteront des variables définies dans une microstructure de référence, les majuscules latines dans une configuration initiale du corps et les minuscules latines dans la configuration actuelle.

1.2.2 Équations de bilan pour un milieu des Cosserat

On introduit les notations suivantes en configuration actuelle : $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ masse volumique, $\mathbf{T} \in \text{Lin}$ tenseur de contrainte de Cauchy, $\mathbf{Z} \in \mathcal{T}_{\mathbf{N}}^*(\text{Orth}^+)$ couple équilibré interne, $\mathbf{s} \in \text{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{T}_{\mathbf{N}}^*(\text{Orth}^+))$ tenseur de micro-contrainte⁽⁵⁾, $\mathbf{b} \in \mathcal{V}^*$ force externe agissant sur l'unité de masse, $\mathbf{t} \in \mathcal{V}^*$ force externe agissant sur l'unité de surface, $\mathbf{C} \in \mathcal{T}_{\mathbf{N}}^*(\text{Orth}^+)$ couple externe agissant sur l'unité de surface, $\chi \in \mathbb{R}^+$ la co-énergie cinétique (définie comme dans [16]), $\psi \in \mathbb{R}^+$ énergie libre massique, $\eta \in \mathbb{R}^+$ puissance dissipée dans l'unité de volume.

Les équations de bilan de la quantité de mouvement en tout point régulier d'un milieu des Cosserat sont

$$\begin{cases} \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{u}} \\ \text{div} \mathbf{s} + \mathbf{Z} = \rho \left(\left(\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{N}} \right)' - \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{N}} \right) \\ (s_{i\alpha j, j} + Z_{i\alpha} = \rho \left(\left(\frac{\partial \chi}{\partial N_{i\alpha}} \right)' - \frac{\partial \chi}{\partial N_{i\alpha}} \right)) \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{B},$$

$$\begin{cases} \mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{f} \\ \mathbf{s} \mathbf{n} = \mathbf{C} \quad (s_{i\alpha j} n_j = C_{i\alpha}) \end{cases} \quad \text{sur } \partial \mathcal{B}.$$

l'objectivité de la puissance des efforts intérieurs implique (l'exposant minuscule t dénote, selon sa position, le transposé gauche ou droit d'un tenseur d'ordre trois)

$$\text{skw}[\mathbf{T} - \mathbf{Z}\mathbf{N}^T + {}^t[(\text{grad} \mathbf{N})^T] \mathbf{s}] = 0 \quad (1.1)$$

$$(T_{ij} - Z_{i\alpha} N_{j\alpha} + N_{i\alpha, k} s_{j\alpha k} = T_{ji} - Z_{j\alpha} N_{i\alpha} + N_{j\alpha, k} s_{i\alpha k}).$$

⁵ \mathcal{V} est l'espace des translations de l'espace euclidien.

Toujours en tout point régulier l'inégalité de Clausius-Duhem dans tout processus isotherme s'écrit

$$\begin{aligned} -\rho\dot{\psi} + \mathbf{T} \cdot \text{gradu} - \mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{N}} + \mathfrak{s} \cdot \text{grad}\dot{\mathbf{N}} &= \eta \geq 0 \\ (-\rho\dot{\psi} + T_{ij}u_{i,j} - Z_{i\alpha}\dot{N}_{i\alpha} + s_{i\alpha k}\dot{N}_{i\alpha,k} &= \eta \geq 0). \end{aligned}$$

La surface d'un grain est par hypothèse une surface matérielle homéotherme supportant une discontinuité de la variable qui décrit le réseaux cristallin \mathbf{N} , et éventuellement un discontinuité de la transformation Φ . Soit Γ une telle surface, ayant la représentation paramétrique $x = p(\gamma_\alpha, t)$, $\alpha \in \{1, 2\}$; et soit Γ_* (image de référence de Γ) le lieu $x_* = \Phi^{-1}(p(\gamma_\alpha, t), t)$ pour t fixé. Soit $g(x, t) = 0$ la représentation intrinsèque de Γ ; et $g_* = g \circ \Phi = 0$ celle de Γ_* .

Pour (γ_α, t) supportant des singularités de Φ , Γ_* peut ne pas exister. Dans de pareils cas on considère toujours possible la définition des inverses $(\Phi^-)^{-1}$ et $(\Phi^+)^{-1}$ et donc des images Γ_*^- and Γ_*^+ de Γ dans la configuration de référence, traces respectivement de $g_*^+ := g \circ \Phi^+$ and $g_*^- := g \circ \Phi^-$.

Soit $\mathbf{n}_\Gamma := \frac{\text{grad}g}{|\text{grad}g|}$ la normale à Γ , $\mathbf{n}_{\Gamma_0} := \frac{\text{Grad}g_*}{|\text{Grad}g_*|}$ son image de référence, $\mathbf{F} := \text{Grad}\Phi$ le gradient de la transformation (éventuellement discontinu sur Γ)

$$\mathbf{n}_{\Gamma_*} = \left(\frac{\mathbf{F}^T}{|\mathbf{F}^T \mathbf{n}_\Gamma|} \right)^\pm \mathbf{n}_\Gamma.$$

Par hypothèse soit Γ_* telle que $[[\rho_*]] = 0$.

Tout point de Γ peut être animé de deux vitesses \mathbf{v}^+ et \mathbf{v}^- différentes; Soit $\mathbf{w}_t := [[\mathbf{v}]] - ([[\mathbf{v}]] \cdot \mathbf{n}_\Gamma) \mathbf{n}_\Gamma$ le taux de glissement localisé sur la surface en configuration actuelle, μ le taux de masse échangé par l'unité de surface dans cette configuration et $\mathbf{B} := \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ le tenseur de Cauchy-Green :

$$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{w}_t + \left[\frac{\mathbf{B}}{\rho \mathbf{n}_\Gamma \cdot \mathbf{B} \mathbf{n}_\Gamma} \right] \mathbf{n}_\Gamma \mu,$$

Les équations de bilan en tout point régulier de la surface de discontinuité sont (cf. [22, 26])

$$\begin{aligned} [[\mu]] &= 0, \quad [[\mathbf{T}]] \mathbf{n}_\Gamma = [[\mathbf{u}]] \mu, \\ [[\mathbf{s} \mathbf{n}_\Gamma \mathbf{N}^T]] &= \mu \left[\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{N}} \mathbf{N}^T \right] \quad ([[s_{i\alpha h} n_{\Gamma h} N_{j\alpha}]] = \mu \left[\frac{\partial \chi}{\partial N_{i\beta}} N_{j\beta} \right]), \\ \eta_s &= \mathbf{w}_t \cdot \langle \mathbf{T} \rangle \mathbf{n}_\Gamma + [[\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}}]] \cdot \langle \mathbf{N}^T \mathbf{s} \mathbf{n}_\Gamma \rangle \\ &+ \left(\mathbf{n}_\Gamma \cdot \left[\frac{\mathbf{B}}{\rho \mathbf{n}_\Gamma \cdot \mathbf{B} \mathbf{n}_\Gamma} \right] \langle \mathbf{T} \rangle \mathbf{n}_\Gamma - [[\psi]] - [[\kappa]] + \langle \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}} \rangle \cdot \left[\mathbf{N}^T \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{N}} \right] \right) \mu \geq 0 \end{aligned}$$

respectivement pour la masse, la quantité de mouvement de translation, la quantité de mouvement de rotation et pour l'entropie (dans la forme de l'inégalité de Clausius-Duhem en condition isotherme et homéotherme).

Si χ est une fonction quadratique du taux de rotation du réseau, alors $\kappa = \chi$ et

$$\eta_s = \mathbf{w}_t \cdot \langle \mathbf{T} \rangle \mathbf{n}_\Gamma + \llbracket \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}} \rrbracket \cdot \langle \mathbf{N}^T \mathbf{s}_{\mathbf{n}_\Gamma} \rangle + \left(\mathbf{n}_\Gamma \cdot \llbracket \frac{\mathbf{B}}{\rho \mathbf{n}_\Gamma \cdot \mathbf{B} \mathbf{n}_\Gamma} \rrbracket \langle \mathbf{T} \rangle \mathbf{n}_\Gamma - \llbracket \psi \rrbracket \right) \mu.$$

1.2.3 Équations de comportement du polycristal

Décomposition multiplicative du gradient de la transformation

Notre point de départ pour l'écriture des relations de comportement est la décomposition multiplicative à la Lee du gradient de la transformation. L'indétermination liée à la rotation de la configuration relâchée peut être éliminée grâce à l'identification de cette rotation avec celle du réseau ⁽⁶⁾.

Dans le schéma idéal de la plasticité par glissement multiple les plans et les directions de glissement ne sont transformés lors d'un processus de déformation plastique que par une rotation de l'ensemble des systèmes de glissement. Ces objets géométriques sont – idéalement – reliés à la structure périodique du cristal. On fait l'hypothèse (en l'absence de changements de phase des cristaux) que l'ensemble des directions cristallographiques dans une configuration déformée est obtenu de celui donné dans une configuration de référence du monocristal, choisie – par exemple – dans son état naturel, moyennant une transformation affine.

Soit \mathbf{G}_o le champ tensoriel donnant la transformation affine du réseau dans la configuration de référence du corps (qui peut différer, en général, de la configuration de référence du monocristal); soit \mathbf{G} le champ de même nature dans la configuration actuelle. Notons que $\mathbf{G} \neq \mathbf{F}$: au cours de la déformation d'un élément de matière cristalline idéale constituant le polycristal le mouvement des sites du réseau est décrit par \mathbf{G} celui des atomes par \mathbf{F} . \mathbf{F} doit satisfaire la compatibilité $\text{Grad} \mathbf{F} = \text{Grad} \mathbf{F}^t$, \mathbf{G} non.

S'il n'y a jamais eut d'écoulement plastique $\mathbf{F} = \mathbf{G} \mathbf{G}_o^{-1}$, sinon le résultat de cet écoulement est décrit par le transporteur plastique

$$\mathbf{P} := \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{G}_o.$$

Finalement, en décomposant \mathbf{G} dans une rotation \mathbf{N} et une élongation \mathbf{E} du réseau,

$$\mathbf{G} = \mathbf{N} \mathbf{E} : \mathbf{E} \in \text{Sym}, \mathbf{N} \in \text{Orth}^+;$$

(et aussi $\mathbf{G}_o = \mathbf{N}_o \mathbf{E}_o$) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} \mathbf{E} \mathbf{E}_o^{-1} \mathbf{N}_o^{-1} \Rightarrow \text{gradu} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{N}} \mathbf{N}^T + \mathbf{N} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}^T + \mathbf{N} \mathbf{E} \dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}^T$$

⁶Dans ce paragraphe on présente [8, 29] (voir p. xiii et suiv.).

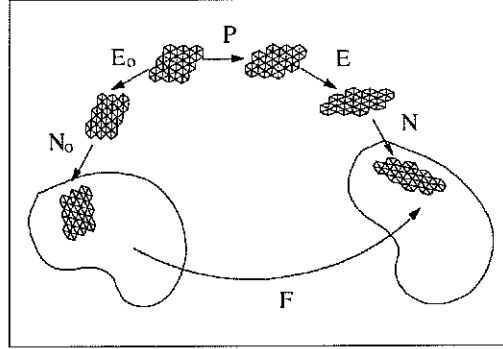


FIG. 1.1 – Schéma de la décomposition multiplicative adoptée du gradient de la transformation.

Courbure du réseau

Dans la théorie continue des dislocation et dans la théorie continue des défauts on introduit des mesures objectives de l'incompatibilité d'un champ de micro-morphismes tel que \mathbf{G} dans notre modèle (cf. [54, 79, 15]).

On définit la courbure lagrangienne du réseau cristallin ($\mathbb{k} \in \text{Lin}(\mathcal{V}, \text{Skw})$) :

$$\mathbb{k} := \mathbf{N}^T \text{Grad} \mathbf{N} \quad (k_{\alpha\beta K} := N_{h\alpha} N_{h\beta, K}),$$

et on considère une décomposition additive :

$$\mathbb{k} = \mathbb{k}^E + \mathbb{k}^P,$$

basée sur l'hypothèse $\|\mathbb{k}^E\| \ll \|\mathbb{k}^P\|$.

Hypothèses constitutives

On considère

$$\psi = \psi(\mathbf{E}, \mathbb{k}^E), \quad \eta = \eta(\dot{\mathbf{P}}, \dot{\mathbb{k}}^P);$$

avec η fonction positivement homogène de degré un.

L'inégalité de Clausius-Duhem implique et est impliquée par la condition d'objectivité (1.1), par les lois de l'élasticité :

$$\text{sym}(\mathbf{N}^T \mathbf{T} \mathbf{N} \mathbf{E}^{-T}) = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{N}^T \mathbf{s} \mathbf{F}^{-T} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{k}^E} \quad (N_{h\alpha} s_{h\beta k} F_{Kk}^{-1} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial k_{\alpha\beta K}}) \quad (1.3)$$

(note que $\mathbf{N}^T \mathbf{s} \mathbf{n} \in \text{Skw} \forall \mathbf{n}$), et par la condition de dissipation

$$\mathbf{E}^T \mathbf{N}^T \mathbf{T} \mathbf{N} \mathbf{E}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{k}^E} \cdot \dot{\mathbb{k}}^P = \eta(\dot{\mathbf{P}}, \dot{\mathbb{k}}^P), \quad (1.4)$$

qui doit être vérifiée dans tout processus – c'est à dire quelque soit $\dot{\mathbf{P}}$, $\dot{\mathbf{k}}^P$.

On adopte l'hypothèse classique de la plasticité par glissement multiple

$$\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} := \sum_{\kappa} \nu_{\kappa} \mathbf{m}_{(\kappa)}^* \otimes \mathbf{n}_{(\kappa)}^*, \quad (1.5)$$

et l'hypothèse de décomposition de la dissipation

$$\begin{aligned} \eta &= \eta(\dot{\mathbf{P}}(\nu_1, \dots, \nu_{\bar{\kappa}}), \mathbf{0}) + \eta(\mathbf{0}, \dot{\mathbf{k}}^P) \\ &= \sum_{\kappa} \eta'_{\kappa}(\nu_{\kappa}) + \eta(\mathbf{0}, \dot{\mathbf{k}}^P). \end{aligned} \quad (1.6)$$

On défini la scission résolue sur le système de glissement κ :

$$\tau_{\kappa} := (\mathbf{NEm}_{(\kappa)}^*) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{NE}^{-T} \mathbf{n}_{(\kappa)}^*), \quad (1.7)$$

et la contrainte de courbure :

$$\mathfrak{m} := N^T \mathfrak{sF}^{-T}. \quad (1.8)$$

Les équations (1.4), (1.1), (1.2), (1.3), (1.6), (1.7) et (1.8) impliquent

$$\sum_{\kappa} \tau_{\kappa} \nu_{\kappa} + \mathfrak{m} \cdot \dot{\mathbf{k}}^P = \sum_{\kappa} \eta'_{\kappa}(\nu_{\kappa}) + \eta(\mathbf{0}, \dot{\mathbf{k}}^P) \quad \forall \{\nu_{\kappa}\}, \dot{\mathbf{k}}^P. \quad (1.9)$$

Lois d'écoulement

On adopte la loi de Schmid pour la dissipation due au glissement

$$\eta'_{\kappa}(\nu_{\kappa}) := \tau_{c\kappa} |\nu_{\kappa}|, \quad (1.10)$$

et une loi associée à un critère convexe pour la dissipation due à la courbure du réseau.

Soit $\mathcal{E} \subset \text{Lin}(\text{Skw}, \mathcal{V})$ la région des chargements potentiellement supportables, $\partial\mathcal{E}$ sa surface et $\mathfrak{n}_{\partial\mathcal{E}}(\mathfrak{m})$ la normale sortante de $\mathfrak{m} \in \partial\mathcal{E}$. Soit $\bar{\mathfrak{m}}(\dot{\mathbf{k}}^P)$ le point d'appui de la direction d'écoulement $\dot{\mathbf{k}}^P$, $\bar{\mathfrak{m}}(\dot{\mathbf{k}}^P) \in \partial\mathcal{E} : \dot{\mathbf{k}}^P \parallel \mathfrak{n}_{\partial\mathcal{E}}(\bar{\mathfrak{m}})$ (dont l'unicité découle de la convexité stricte de \mathcal{E}). La dissipation associée à $\dot{\mathbf{k}}^P$ est par hypothèse

$$\eta(\mathbf{0}, \dot{\mathbf{k}}^P) := \bar{\mathfrak{m}}(\dot{\mathbf{k}}^P) \cdot \dot{\mathbf{k}}^P. \quad (1.11)$$

Les hypothèses (1.10) et (1.11) avec (1.9) impliquent les critères et les lois d'écoulement

$$\nu_{\kappa} \tau_{\kappa} - |\nu_{\kappa}| \tau_c = 0, \quad \nu_{\kappa} \begin{cases} < 0 & \text{si } \tau_{\kappa} = -\tau_c \\ = 0 & \text{si } |\tau_{\kappa}| < \tau_c \\ > 0 & \text{si } \tau_{\kappa} = \tau_c \end{cases}$$

et

$$\left(\mathfrak{m} - \bar{\mathfrak{m}}(\dot{\mathbf{k}}^P)\right) \cdot \dot{\mathbf{k}}^P = 0 \quad \forall \dot{\mathbf{k}}^P, \quad \dot{\mathbf{k}}^P \begin{cases} = 0 & \text{si } \mathfrak{m} \in \overset{\circ}{\mathcal{E}} \\ = \lambda \mathfrak{n}_{\partial \mathcal{E}}(\mathfrak{m}) & \text{si } \mathfrak{m} \in \partial \mathcal{E} \end{cases}$$

($\lambda \in \mathbb{R}^+$).

Par exemple on peut prendre

$$\bar{\mathfrak{m}}(\dot{\mathbf{k}}^P) = \alpha_c \frac{\dot{\mathbf{k}}^P}{\sqrt{\dot{\mathbf{k}}^P \cdot \dot{\mathbf{k}}^P}}, \quad (1.12)$$

$\alpha_c \in \mathbb{R}^+$ une constante matérielle :

$$\left(\sqrt{\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}} - \alpha_c\right) \sqrt{\dot{\mathbf{k}}^P \cdot \dot{\mathbf{k}}^P} = 0, \quad \dot{\mathbf{k}}^P = \begin{cases} = 0 & \text{si } \sqrt{\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}} < \alpha_c \\ = \frac{\lambda_1}{\alpha_c} \mathfrak{m} & \text{si } \sqrt{\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}} = \alpha_c \end{cases}$$

et $\eta(\mathbf{0}, \dot{\mathbf{k}}^P) = \sqrt{(\dot{\mathbf{k}}^P \cdot \dot{\mathbf{k}}^P)(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m})} = \lambda_1 \alpha_c$.

1.2.4 Surfaces de singularité

Les surfaces de singularité de la solution du problème posé peuvent représenter un ou plusieurs des phénomènes physiques suivants :

- rotations différentielles (localisation de la courbure) du réseau cristallin,
- fracture par glissement cohérent,
- croissance d'un grain.

Localisation de la courbure

Dans le premier cas les équations d'équilibre de la microcontrainte (en statique) et la dissipation sur le front sont :

$$[[\mathbf{N}^T \mathfrak{s}\mathfrak{n}_\Gamma]] = 0,$$

$$\eta_\Gamma = [[\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}}]] \cdot (\mathbf{N}^T \mathfrak{s}\mathfrak{n}_\Gamma).$$

En prenant un domaine convexe des chargements potentiellement supportables $\mathcal{E}_\Gamma \subset Skw$:

$$\eta_\Gamma = \pi_\Gamma([[\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}}]]), \quad \pi_\Gamma(\mathbf{A}) := \sup_{\mathbf{C} \in \mathcal{E}_\Gamma} \{\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}\},$$

et en appelant $\mathbf{V} : Skw \rightarrow \partial \mathcal{E}_\Gamma$:

$$\pi_\Gamma(\mathbf{A}) = \mathbf{V}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}.$$

On obtient le critère pour l'évolution plastique de la rotation relative au travers de la surface :

$$\left(\mathbf{N}^T \mathfrak{s}\mathfrak{n}_\Gamma - \mathbf{V}([[\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}}]])\right) \cdot [[\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}}]] = 0 \quad \forall [[\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}}]], \quad (1.13)$$

et la loi d'écoulement associée

$$\llbracket \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}} \rrbracket \begin{cases} = \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{N}^T \mathbf{sn}_\Gamma \in \overset{\circ}{\mathcal{E}}_\Gamma \\ = \lambda_2 \mathbf{W}_{\partial \mathcal{E}_\Gamma}(\mathbf{N}^T \mathbf{sn}_\Gamma) & \text{si } \mathbf{N}^T \mathbf{sn}_\Gamma \in \partial \mathcal{E}_\Gamma, \end{cases} \quad (1.14)$$

où $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, et $\mathbf{W}_{\partial \mathcal{E}_\Gamma}(\mathbf{N}^T \mathbf{sn}_\Gamma) \in Skw$ est la normale sortante de \mathcal{E}_Γ au point $\mathbf{N}^T \mathbf{sn}_\Gamma$.

On peut prendre

$$\mathbf{V}(\mathbf{A}) = \bar{m}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{n}_{\Gamma_0}) \mathbf{n}_{\Gamma_0};$$

par exemple dans le cas (1.12) :

$$\pi_\Gamma(\mathbf{A}) = \sqrt{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})}, \quad \mathbf{V}(\mathbf{A}) = \alpha_c \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}},$$

et le critère (1.13) avec la loi d'écoulement (1.14) devient

$$(\sqrt{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} - \alpha_c) \llbracket \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}} \rrbracket = 0, \quad \llbracket \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}} \rrbracket \begin{cases} = \mathbf{0} & \text{si } \sqrt{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} < \alpha_c \\ = \frac{\lambda_2}{\alpha_c} \mathbf{N}^T \mathbf{sn}_\Gamma & \text{si } \sqrt{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} = \alpha_c, \end{cases}$$

Localisation du glissement

Dans le cas du glissement localisé la dissipation est ⁽⁷⁾

$$\eta_\Gamma = \mathbf{w}_t \cdot \mathbf{Tn}_\Gamma.$$

En prenant

$$\eta_\Gamma(\mathbf{w}_t) = \varphi(\mathbf{w}_t), \quad \varphi(\mathbf{s}) := \sup_{\mathbf{f} \in \mathcal{X}} \{\mathbf{f} \cdot \mathbf{s}\} \quad \forall \mathbf{s} \in \mathcal{S}(\Gamma),$$

le critère de localisation du glissement et la loi d'écoulement associée sont

$$(\mathbf{Tn}_\Gamma - \mathbf{t}(\mathbf{w}_t)) \cdot \mathbf{w}_t = 0 \quad \forall \mathbf{w}_t,$$

$$\mathbf{w}_t \begin{cases} = \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{Tn}_\Gamma - (\mathbf{n}_\Gamma \cdot \mathbf{Tn}_\Gamma) \mathbf{n}_\Gamma \in \overset{\circ}{\mathcal{X}} \\ = \lambda_3 \mathbf{w}_{\partial \mathcal{X}} & \text{si } \mathbf{Tn}_\Gamma - (\mathbf{n}_\Gamma \cdot \mathbf{Tn}_\Gamma) \mathbf{n}_\Gamma \in \partial \mathcal{X} \end{cases}$$

où $\lambda_3 \in \mathbb{R}^+$ et $\mathbf{w}_{\partial \mathcal{X}}$ est la normale à $\partial \mathcal{X}$ au point $\mathbf{Tn}_\Gamma - (\mathbf{n}_\Gamma \cdot \mathbf{Tn}_\Gamma) \mathbf{n}_\Gamma$.

Croissance des grains

On se place dans le cas $\dot{\mathbf{N}}\mathbf{N}^T = 0$ dans tout le corps et $w_t = 0$ sur la discontinuité. La dissipation est alors ⁽⁸⁾ :

$$\eta_\Gamma = \sigma \mu \quad ; \quad \sigma := \llbracket \frac{\mathbf{n}_\Gamma \cdot \mathbf{Tn}_\Gamma}{\rho} - (\psi + \frac{(u_n - v_n)^2}{2}) \rrbracket$$

⁷Ce paragraphe resume [31] (voir p. xiii et suiv.).

⁸Dans ce paragraphe on présente [16, 17] (voir p. xiii et suiv.).

On considère un critère à la Griffith pour l'évolution du front :

$$\sigma_c |\mu| - \sigma \mu = 0 \quad \forall \mu,$$

et la lois d'écoulement (\mathbf{v} vitesse du front dans la configuration actuelle) :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\Gamma \begin{cases} = \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n}_\Gamma & \text{si } |\sigma| < \sigma_c \\ \geq \max\{\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}_\Gamma\} & \text{si } \sigma = -\sigma_c \\ \leq \min\{\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}_\Gamma\} & \text{si } \sigma = \sigma_c \end{cases} .$$

Dans [17] on calcule dans un cas bidimensionnel σ_c en fonction de l'orientation du réseau cristallin de part et d'autre de la frontière entre deux grains, dans l'hypothèse que celle-ci se déplace en régime permanent et que la dissipation engendrée par ce mouvement dérive des contributions de glissement multiple suivant la loi de Schmid. Le résultat supporte la validité de l'expression approchée ($\beta \in \mathbb{R}^+$)

$$\sigma_c \approx \beta \|\mathbf{N}^+(\mathbf{N}^-)^T\| .$$

1.2.5 Conclusions sur le modèle à la Cosserat

Le modèle présenté permet l'étude d'un polycristal à une échelle suffisamment grande pour que la plasticité puisse être décrite par la théorie du glissement multiple, mais assez petite afin que les surfaces des grains soient représentés comme des surfaces de discontinuité de la solution.

Un tel modèle est beaucoup trop riche pour qu'il puisse être convenablement utilisé dans un calcul de structures, et la question se pose d'une réduction de sa complexité. Il sera donc pris comme modèle microscopique de départ pour un passage micro-macro qui fait l'objet des paragraphes suivantes.

1.3 Globalisation

1.3.1 Introduction

Dans §1.2 le polycristal a été vu comme un agrégat de grains séparés par des surfaces de singularité de la microstructure. On se demande maintenant quelle partie de l'information contenue dans une tel schéma physique peut être négligée en vue d'une réduction de la taille du problème lorsque un grand nombre de grains doit être pris en compte. On envisage l'écriture d'un modèle de milieu continu dont les éléments matériels représentent une population statistiquement significative de grains du polycristal du §1.2 ⁽⁹⁾.

Une question de même nature se pose pour les milieux composés de constituants homogènes (milieux poreux ou granulaires, saturés ou non, par exemple). La

⁹Les sujets traités dans cette section du chapitre sont présentés dans les publications figurantes dans la liste donnée à la p. xiii et suiv. avec les numéros [1, 3, 5, 6, 25].

technique des moyennes glissantes permet la transformation d'un problème posé pour un tel corps en imaginant une suite au cours du processus de partitions finies de son volume dans un problème de milieu multiphasique (cf. [40]). L'information perdue dans le passage est relative à la configuration géométrique de la partition.

Le cas des polycristaux diffère de celui des milieux composés d'un nombre fini de constituants homogènes essentiellement car

- l'identité des grains est liée à l'orientation des directions cristallographiques et dépend du processus,
- la modélisation à l'échelle des grains se fait par la théorie des milieux à microstructure (et non par celle de Cauchy).

Cela suggère la modification de l'approche par moyennes glissantes que nous avons appelée « *globalisation* ».

1.3.2 Définition

L'hypothèse physique fondamentale adoptée est que, à l'intérieur d'un petit élément de matière polycristalline, l'interaction deux à deux entre monocristaux dépend de la désorientation des leurs réseaux cristallins, la distance géodésique entre les orientations des deux réseaux étant une mesure objective de cette désorientation.

A partir de cette idée on construit un outil qui permet de comparer deux microstructures en fonction de leur distance géodésique; si l'une est fixée à une valeur test on obtiendra une observation de l'autre relative à l'orientation de la microstructure test.

Soit γ une mesure $C^m(\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+)$, $m > 1$ à support compact dont le choix est convenable; soit $\delta_{\mathcal{M}}$ la distance géodésique entre microstructures ($\mathcal{M} \subseteq SO(3)$ sous-groupe propre en présence de symétries du comportement du réseau cristallin qui ne sont pas affectées par le processus d'écoulement plastique).

On définit la fonction d'observation des microstructures O_μ

$$\{O_\mu := \gamma \circ \delta_{\mathcal{M}}\} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

elle est objective en conséquence de l'objectivité de la distance géodésique $\delta_{\mathcal{M}}$, et dérivable avec dérivée continue autant de fois qu'on veut grâce au choix de la mesure γ .

La dérivée de la fonction d'observation est un élément de l'espace tangent à la microstructure au point de dérivation; l'objectivité permet d'établir un théorème de transport de cette dérivée sur l'espace tangent à un autre point de la microstructure (cf. [95]). On peut démontrer (cf. [3]) :

$$\frac{\partial O_\mu}{\partial \mathbf{R}(\nu)} \mathbf{R}^T(\nu) = \mathbf{R}(\mu) \left(\frac{\partial O_\mu}{\partial \mathbf{R}(\mu)} \right)^T ; \mathbf{R}^T(\nu) \frac{\partial O_\mu}{\partial \mathbf{R}(\nu)} = \left(\frac{\partial O_\mu}{\partial \mathbf{R}(\mu)} \right)^T \mathbf{R}(\mu).$$

En définissant, par un choix de $\varphi \in C^m(\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+)$, $m > 1$ à support compact

éventuellement différent de γ , la fonction d'observation objective des positions dans l'espace géométrique O_x

$$\forall (x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \quad O_x(x, y) = \varphi(\|x - y\|) \in \mathbb{R}^+,$$

on a la propriété de transport :

$$\text{grad}_x O_x(x, y) = -\text{grad}_y O_x(x, y).$$

Soit \mathcal{F} un espace linéaire, on appelle globalisation la transformée ($\mathcal{F} \in \mathbb{R}^+$ est une chronologie)

$$\left. \begin{array}{l} \forall f : \mathcal{E} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \\ \forall \nu : \mathcal{E} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M} \\ \forall (x, \mu) \in \mathcal{E} \times \mathcal{M} \end{array} \right\} \rightarrow \tilde{f} : \mathcal{E} \times \mathcal{M} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

$$\tilde{f}(x, \nu, \tau) := \int_{\mathcal{E}} f(y, \tau) O_\mu(\mu, \nu(y, \tau)) O_x(x, y) d(\text{vol})_y.$$

Pour un champ de microstructure donné $\nu(y, \tau)$ cette opération transforme tout champ sur l'espace-temps dans un champ sur l'espace-microstructure-temps. Il s'agit d'une modification objective grâce à l'objectivité de la mesure choisie. La fonction globalisée est donc continue avec sa dérivée d'ordre m sur $\mathcal{E} \times \mathcal{M}$ et change avec l'observateur comme sa fonction primitive qu'on appellera microscopique. La somme sur $\mathcal{E} \times \mathcal{M}$ de la globalisée peut être normalisée de façon que :

$$\int_{\mathcal{E} \times \mathcal{M}} \tilde{f} d(\text{vol})_x d\mu = \int_{\mathcal{E}} f d(\text{vol})_y.$$

Les rayons des supports compacts des fonctions γ et φ qui permettent de définir O_μ et O_x introduisent un rapport entre l'échelle de la représentation du corps dans \mathcal{E} avec un modèle multi-champs et celle de sa représentation multi-variables dans $\mathcal{E} \times \mathcal{M}$ qu'on appelle « *espace profond* ». Le premier rayon est la distance géométrique en dessous de laquelle on refuse de distinguer deux points matériels d'après la donnée de leurs positions : les projections géométriques de l'image de ces deux points dans l'espace profond coïncident. Le support compact de la fonction γ représente la désorientation minimale pour que deux données de micro-texture soit effectivement distinctes : on va considérer comme alignés deux réseau dont la désorientation est trop faible par rapport à l'estimation qu'on peut en faire.

1.3.3 Théorèmes

On montre une propriété de la globalisation qui est à la base des développements présentés au paragraphe suivant.

La globalisée de la dérivée matérielle par rapport au temps d'une fonction f s'écrit comme la dérivée matérielle par rapport au temps de la fonction \tilde{f} (cf.

[3]) :

$$\widetilde{\rho \dot{f}} = \frac{\partial(\widetilde{\rho f})}{\partial \tau} + \operatorname{div}_\mu(\widetilde{\rho f \mathbf{R}(\mu) \mathbf{R}^T}) + \operatorname{div}_x(\widetilde{\rho f \dot{\mathbf{x}}}). \quad (1.15)$$

Un résultat semblable est valable dans le cas d'une dérivée par rapport à y :

$$\widetilde{\operatorname{div}_y \mathbf{T}} = \operatorname{div}_\mu(\widetilde{-\mathbf{R}(\mu) \operatorname{grad}_y \mathbf{R}^T(\mu) \mathbf{T}}) + \operatorname{div}_x \widetilde{\mathbf{T}}, \quad (1.16)$$

avec la définition de la divergence par rapport à μ :

$$\operatorname{div}_\mu \mathbb{b} := \frac{\partial b_{ijk}}{\partial \mathbf{R}_{jh}(\mu)} \mathbf{R}_{kh}(\mu) \mathbf{e}_i.$$

Si toute rotation ν superposant le monocristal de référence sur le monocristal local se fait autour du même axe de rotation (cas d'un polycristal plan ou « *polylamelle* ») les expressions (1.15) et (1.16) se simplifient :

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho \dot{f}} &= \frac{\partial(\widetilde{\rho f})}{\partial \tau} + \operatorname{div}_\mu(\widetilde{\rho f \dot{\mu}}) + \operatorname{div}_x(\widetilde{\rho f \dot{x}}), \\ \widetilde{\operatorname{div}_y \mathbf{T}} &= \frac{\partial(\widetilde{\mathbf{T} \operatorname{grad}_y \nu})}{\partial \mu} + \operatorname{div}_x \widetilde{\mathbf{T}}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

1.3.4 Application

La globalisation est une modification du support de la fonction transformée, en particulier un changement de l'espace contenant ce support. Les équations fondamentales de bilan thermo-mécanique doivent être valables indépendamment de l'espace choisi pour l'observation des corps. En sommant par globalisation une telle équation écrite en forme homogène pour le corps représenté dans l'espace-temps habituel on obtient l'expression valable dans un espace différent. Cet espace, l'espace profond-temps, est le produit cartésien entre l'espace-temps classique et la variété des microstructures. Le résultat est une sorte de théorie des mélanges, mais avec une distribution continue de constituants sur la variété des microstructures.

La globalisation de l'équation de conservation de la masse microscopique donne l'équation homonyme dans l'espace profond et les définitions des champs de vitesse macroscopiques :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial \tau} + \operatorname{div}_x(\widetilde{\rho \mathbf{u}}) + \operatorname{div}_\mu(\widetilde{\rho \mathbf{X}}) &= 0, \\ \mathbf{u} &:= \frac{\widetilde{\rho \dot{\mathbf{x}}}}{\widetilde{\rho}}, \quad \mathbf{u}_f := \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{u}, \quad \mathbf{X} := \frac{\rho \dot{\mathbf{N}} \mathbf{N}^T}{\widetilde{\rho}}, \quad \mathbf{X}_f := \dot{\mathbf{N}} \mathbf{N}^T - \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Notons les définitions de \mathbf{u} et \mathbf{X} , densités par rapport à la masse globalisée de champs obtenus par globalisation. La valeur en (x, μ, τ) d'un tel champ est une estimation de la somme de la densité massique de la fonction microscopique sur la fraction massique du corps qui se trouve à l'instant τ en proximité du point x (selon le rayon de la boule d'observation des positions géométriques donné par le

choix du support compact de O_x) avec une microstructure proche de μ (selon la boule d'observation des microstructures donné par le choix du support compact de O_μ).

En globalisant l'équation de bilan de la quantité de mouvement de translation on a l'équation homonyme dans l'espace profond et les définition de la contrainte de Cauchy \mathbf{T}_d et de la contrainte de 'filtration' \mathfrak{t} qui apparaissent dans cette équation :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x \mathbf{T}_d + \operatorname{div}_\mu \mathfrak{t} + \widetilde{\rho \mathbf{b}} &= \widetilde{\rho \dot{\mathbf{u}}}, \\ \mathbf{T}_d &:= \widetilde{\mathbf{T} - \rho \mathbf{u}_f \otimes \mathbf{u}_f}, \quad \mathfrak{t} := \widetilde{-\mathbf{N} (\operatorname{grad}_y \mathbf{N}^T) \mathbf{T} - \rho \mathbf{u}_f \otimes \mathbf{X}_f}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

avec la définition de la dérivée matérielle dans l'espace profond (cf. (1.17)) :

$$\dot{f}(x, \mu, \tau) := \frac{\partial f}{\partial \tau} + \operatorname{grad}_x f \cdot \mathbf{u} + \operatorname{grad}_\mu f \cdot \mathbf{X}.$$

La globalisation de l'équation de bilan de la quantité de mouvement de la microstructure entraîne la définition, entre autre, de la force d'inertie dans l'espace profond. Si ce passage est aisé dans le cas du polylamelle (cf. [3]), des difficultés – non seulement techniques si on n'adopte pas une forme quadratique en taux de rotation de la microstructure pour l'énergie cinétique – émergent pour le polycristal. Pour les éviter (sans modifier par ailleurs la généralité de la démarche) on fait l'hypothèse que les actions inertielles sur la microstructure sont toujours négligeables, ce qui est physiquement acceptable pour les polycristaux métalliques. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_d + \operatorname{div}_x \mathfrak{s}_d + \operatorname{div}_\mu \mathfrak{S} &= 0, \\ \mathbf{Z}_d &:= \widetilde{\mathbf{Z}}, \quad \mathfrak{s}_d := \widetilde{\mathfrak{s}}, \quad \mathfrak{S} := \widetilde{-\mathbf{N} (\operatorname{grad}_y \mathbf{N}^T) \mathfrak{s}}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

La globalisation du bilan de l'énergie totale, en tenant compte des équations (1.18) et (1.19), donne :

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho \dot{\varepsilon}}_d &= \mathbf{T}_d \cdot \operatorname{grad}_x \mathbf{u} + \mathfrak{p} \cdot \operatorname{grad}_\mu \mathbf{u} - \mathbf{Z}_d \cdot \mathbf{X} + \mathfrak{s}_d \cdot \operatorname{grad}_x \mathbf{X} + \mathfrak{S} \cdot \operatorname{grad}_\mu \mathbf{X} \\ &\quad - \lambda_d + \operatorname{div}_x \mathfrak{h}_d + \operatorname{div}_\mu \mathfrak{H} \end{aligned}$$

avec les définitions :

$$\begin{aligned} \varepsilon_d &:= \frac{1}{\rho} \widetilde{\rho \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{u}_f^2}{2} \right)}, \quad \lambda_d := \widetilde{\lambda + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_f} \\ \mathfrak{h}_d &:= \widetilde{\mathfrak{h} - \mathbf{T} \mathbf{u}_f + \mathfrak{s}^T \mathbf{X}_f + \rho \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{u}_f^2}{2} \right) \mathbf{u}_f}, \\ \mathfrak{H} &:= \widetilde{\operatorname{grad}_y \mathbf{N} (\mathfrak{h} - \mathbf{T} \mathbf{u}_f + \mathfrak{s}^T \mathbf{X}_f) \mathbf{N}^T + \rho \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{u}_f^2}{2} \right) \mathbf{X}_f}, \end{aligned}$$

où λ et \mathfrak{h} sont l'apport de chaleur dans l'unité de volume et la chaleur sortante par unité de surface (convention classique des signes) microscopiques.

La globalisation du bilan de l'entropie conduit, dans l'hypothèse que la température ϑ soit uniforme en y , à l'équation :

$$\tilde{\rho}\dot{\eta}_d = \frac{\lambda_d}{\vartheta} - \operatorname{div}_x \frac{\mathbf{h}_d}{\vartheta} - \operatorname{div}_\mu \frac{\mathbf{H}}{\vartheta} + \iota_d,$$

où

$$\eta_d := \frac{\tilde{\rho}\eta}{\tilde{\rho}}$$

$$\begin{aligned} \iota_d &= \tilde{\iota} + \frac{1}{\vartheta} \operatorname{div}_x \left[\widetilde{\mathbf{T}\mathbf{u}_f + s\mathbf{X}_f - \rho \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{u}_f^2}{2} \right) \mathbf{u}_f} \right] \\ &+ \frac{1}{\vartheta} \operatorname{div}_\mu \left[\widetilde{\operatorname{grad}_y \mathbf{N}(\mathbf{T}\mathbf{u}_f + s\mathbf{X}_f)\mathbf{N}^T - \rho \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{u}_f^2}{2} \right) \mathbf{X}_f} \right] \end{aligned}$$

et ι est la production d'entropie dans l'unité de volume microscopique.

1.4 Modèle de polycristal dans l'espace profond

Les équations de bilan obtenues par globalisation dans le paragraphe précédent peuvent être écrites indépendamment de tout passage micro-macro, en faisant appel à l'axiomatique classique de la mécanique des milieux continus (cf. [80, 103]) et en choisissant l'espace profond-temps par univers d'observation ⁽¹⁰⁾.

L'hypothèse fondamentale consiste dans l'identification des éléments matériels avec leur trajectoire dans l'espace profond en fonction du temps; il est toujours possible de choisir une configuration de référence du corps, occupant un domaine $\mathcal{B}_* \subseteq \mathcal{E} \times \mathcal{M}$, et de décrire le mouvement du corps par une fonction transformation : $\mathcal{B}_* \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E} \times \mathcal{M}$.

1.4.1 Cinématique

Si on dénote par $(x_*, \mathbf{M}_*) \in \mathcal{B}_*$, avec $\mathbf{M}_* := \mathbf{R}(\mu_*)$, les éléments matériels en configuration de référence et par $(x, \mathbf{M}) \in \mathcal{B}$, $\mathbf{M} := \mathbf{R}(\mu)$, au même temps ces éléments en configuration actuelle et la transformation $\mathcal{B}_* \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{B}$, on voit que les propriétés locales de la transformation sont décrites par les tenseurs :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{xx} &:= \frac{\partial x_i}{\partial x_{*j}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j && \in \operatorname{Lin}, \\ \mathbb{f}_{x\mu} &:= \frac{\partial x_i}{\partial M_{*j\alpha}} M_{*H\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_H && \in \operatorname{Lin}(\operatorname{Skw}, \mathcal{V}), \\ \mathbb{f}_{\mu x} &:= \frac{\partial M_{i\alpha}}{\partial x_{*H}} M_{j\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_H && \in \operatorname{Lin}(\mathcal{V}, \operatorname{Skw}), \\ \mathbb{F}_{\mu\mu} &:= \frac{\partial M_{i\alpha}}{\partial M_{*H\beta}} M_{j\alpha} M_{*K\beta} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_H \otimes \mathbf{e}_K && \in \operatorname{Lin}(\operatorname{Skw}) \end{aligned}$$

¹⁰Cette section du chapitre décrit le contenu des publications figurantes dans la liste donnée à p. xiii et suiv. avec les numéros [1, 3, 4, 5, 6, 19, 25].

(pour les indices on adopte la notation suivante : lettres latines majuscules pour des grandeurs définies dans la configuration de référence du corps, minuscules latines pour la configuration actuelle, minuscules grecques pour un monocristal de référence).

Soient $(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{M}}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{F}_{\mathbf{M}}(\text{Orth}^+)$ les vitesses du point $(x, \mathbf{M}) \in \mathcal{B}$; soit $\mathbf{X} := \mathbf{M}\mathbf{M}^T \in \text{Skw}$. Les gradients $\text{grad}_x \dot{\mathbf{x}} \in \text{Lin}$, $\text{grad}_\mu \dot{\mathbf{x}} \in \text{Lin}(\text{Skw}, \mathcal{V})$, $\text{grad}_x \mathbf{X} \in \text{Lin}(\mathcal{V}, \text{Skw})$, $\text{grad}_\mu \mathbf{X} \in \text{Lin}(\text{Skw})$ peuvent être écrits par rapport aux gradients de la transformation (cf. [3] formules (35) et (36)).

Dans [1, 3] pour l'écriture du comportement on adopte l'hypothèse de « non filtration » $\mathbb{f}_{x\mu} = \mathbf{0}$, par laquelle on obtient :

$$\begin{aligned} \text{grad}_x \dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{F}}_{xx} \mathbf{F}_{xx}^{-1}, & \text{grad}_x \mathbf{X} &= \dot{\mathbb{f}}_{\mu x} \mathbf{F}_{xx}^{-1} - \mathbb{F}_{\mu\mu} \mathbb{F}_{\mu\mu}^{-1} \mathbb{f}_{\mu x} \mathbf{F}_{xx}^{-1}, \\ \text{grad}_\mu \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{0}, & \text{grad}_\mu \mathbf{X} &= \mathbb{F}_{\mu\mu} \mathbb{F}_{\mu\mu}^{-1}. \end{aligned}$$

Le choix de représentation de l'inconnue cinématique comme \mathbf{X} ou $\dot{\mathbf{M}}$ entraîne, par le biais du principe des puissances virtuelles, une différence de représentation des contraintes (cf. [16, 95]). Cette différence apparaît entre les résultats du §1.2 et les équations objet du paragraphe suivant.

1.4.2 Équations de bilan

La conservation de la masse de tout élément matériel s'écrit dans l'espace profond (ρ densité de masse en configuration actuelle pour la mesure de volume dans $\mathcal{E} \times \mathcal{M}$) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}_x(\rho \dot{\mathbf{x}}) + \text{div}_\mu(\rho \mathbf{X}) = 0.$$

La conservation de la quantité de mouvement, écrite à l'aide du principe des puissances virtuelles, donne les équations indéfinies :

$$\begin{aligned} \text{div}_x \mathbf{T} + \text{div}_\mu \mathbf{t} + \rho \mathbf{b} &= \rho \ddot{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{A} + \text{div}_x \mathbf{c} + \text{div}_\mu \mathbf{D} + \rho \mathbf{B} &= \rho \mathbf{M} \left(\left(\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{M}} \right)' - \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{M}} \right), \\ \text{skw} \mathbf{T} - \mathbf{A} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

La conservation de l'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho \dot{\epsilon} &= \lambda - \text{div}_x \mathbf{h} - \text{div}_\mu \mathbf{H} \\ &+ \mathbf{T} \cdot \text{grad}_x \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{t} \cdot \text{grad}_\mu \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \cdot \text{grad}_x \mathbf{X} + \mathbf{D} \cdot \text{grad}_\mu \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse que la température ϑ ne dépend pas de la position dans \mathcal{M} on écrit finalement l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\mathbf{T} \cdot \text{grad}_x \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{t} \cdot \text{grad}_\mu \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \cdot \text{grad}_x \mathbf{X} + \mathbf{D} \cdot \text{grad}_\mu \mathbf{X} \geq 0.$$

1.4.3 Comportement

L'étude du comportement d'un polycristal métallique dans l'espace profond a été proposé dans [1, 3] suivant l'idée d'une décomposition multiplicative (à la Lee) du gradient de la transformation \mathbf{F}_{xx} :

$$\mathbf{F}_{xx} = \mathbf{F}_E \mathbf{F}_P, \quad \mathbf{F}_E = \mathbf{F}_{Erev} \mathbf{F}_{Eblo}, \quad \mathbf{F}_P = \mathbf{G} \mathbf{M},$$

où on distingue, dans l'ordre d'application aux vecteurs matériels, une transformation plastique \mathbf{F}_P , décomposée en une rotation du réseau \mathbf{M} et une transformation plastique avec réseau fixé \mathbf{G} , et une élongation élastique \mathbf{F}_E , décomposée en une partie bloquée \mathbf{F}_{Eblo} et une partie réversible \mathbf{F}_{Erev} .

La modélisation à la Cosserat des polycristaux présenté au §1.2 a été ensuite poursuivie en vue du besoin d'identification des variables introduites dans l'espace profond avec des grandeurs mesurables expérimentalement.

En faisant l'hypothèse $\psi = \psi(\mathbf{E}_E, \vartheta, \mathbf{E}_{Eblo}, \mathbf{G})$ (avec $\mathbf{E}_E := \frac{1}{2}(\mathbf{F}_E^T \mathbf{F}_E - \mathbf{I})$ et $\mathbf{E}_{Eblo} := \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{Eblo}^T \mathbf{F}_{Eblo} - \mathbf{I})$) on obtient les lois d'état

$$\text{sym} \mathbf{T} = \rho \mathbf{F}_E \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_E} \mathbf{F}_E^T, \quad \varsigma = -\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}.$$

et l'inégalité de la dissipation :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M} \mathbf{F}_{xx}^{-1} (\text{sym} \mathbf{T}) \mathbf{F}_{xx} \mathbf{M}^T - \mathbf{Z}) \cdot (\mathbf{X} - \text{skwgrad}_x \dot{\mathbf{x}}) + \\ & \mathbf{F}_{xx}^{-1} (\text{sym} \mathbf{T}) \mathbf{F}_{xx} \cdot \mathbf{M}^T (\text{skwgrad}_x \dot{\mathbf{x}}) \mathbf{M} + \\ & \left(\mathbf{F}_E^{-1} (\text{sym} \mathbf{T}) \mathbf{F}_E - \rho \mathbf{G} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \right) \cdot \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} - \rho \mathbf{F}_{Eblo} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_{Eblo}} \mathbf{F}_{Eblo}^T \cdot \dot{\mathbf{F}}_{Eblo} \mathbf{F}_{Eblo}^{-1} + \\ & \mathbf{c} \cdot \text{grad}_x \mathbf{X} + \mathbb{D} \cdot \text{grad}_\mu \mathbf{X} \geq 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Dans l'hypothèse de glissement multiple

$$\dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} = \sum_{\kappa} \nu_{\kappa} \mathbf{m}^{\kappa} \otimes \mathbf{n}^{\kappa}$$

on définit la scission résolue sur le système de glissement κ :

$$\tau_{\kappa} := \mathbf{m}^{\kappa} \cdot \left(\mathbf{F}_E^{-1} (\text{sym} \mathbf{T}) \mathbf{F}_E - \rho \mathbf{G} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \right) \mathbf{n}^{\kappa}$$

et on suggère que l'inégalité (1.20) soit vérifiée par :

- une loi de Schmid pour la plasticité des systèmes de glissement

$$\tau_{\kappa} \nu_{\kappa} - \bar{\tau}_{\kappa} |\nu_{\kappa}| \leq 0,$$

- un échange irréversible à dissipation nulle entre l'énergie élastique bloquée dans le réseau et l'énergie nécessaire à la rotation du réseau

$$\begin{aligned} & \rho \mathbf{F}_{Eblo} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_{Eblo}} \mathbf{F}_{Eblo}^T \cdot \dot{\mathbf{F}}_{Eblo} \mathbf{F}_{Eblo}^{-1} = \\ & \mathbf{F}_{xx}^{-1} (\text{sym} \mathbf{T}) \mathbf{F}_{xx} \cdot \mathbf{M}^T (\text{skwgrad}_x \dot{\mathbf{x}}) \mathbf{M} + \\ & \mathbf{c} \cdot \text{grad}_x \mathbf{X} + \mathbb{D} \cdot \text{grad}_\mu (\text{skwgrad}_x \dot{\mathbf{x}}), \end{aligned} \quad (1.21)$$

– et une inégalité pour la dissipation due à la rotation du réseau par rapport aux axes principaux du taux de déformation de la matière :

$$(\mathbf{M}\mathbf{F}_{xx}^{-1}(\text{sym}\mathbf{T})\mathbf{F}_{xx}\mathbf{M}^T - \mathbf{Z}) \cdot (\mathbf{X} - \text{skwgrad}_x \dot{\mathbf{x}}) + \mathbb{D} \cdot \text{grad}_\mu(\mathbf{X} - \text{skwgrad}_x \dot{\mathbf{x}}) \geq 0. \quad (1.22)$$

Afin de préciser d'avantage ces relations constitutives il faudrait mener une étude expérimentale qui a été entreprise dans [57], mais qui n'a pas été poursuivie. L'étude théorique des relations micro-macro présentées dans §1.3 et la modélisation fine du polycristal décrite au §1.2 ont le but de combler partiellement ce manque d'information expérimentale, mais les questions posées par les équations (1.21) et (1.22), c'est à dire relatives au comportement de \mathbb{c} et \mathbb{D} , demeurent toujours ouvertes.

1.5 Homogénéisation des polycristaux

1.5.1 Distribution des orientations dans les polycristaux

L'homogénéisation du comportement des polycristaux est un sujet souvent traité dans la littérature, tant dans le cas élastique linéaire que pour les cas dissipatifs. Dans ces derniers on se restreint à l'homogénéisation du comportement tangent et donc à la recherche de solutions dépendantes du processus. Rarement on se pose la question de définir la microstructure – et par conséquent le modèle mécanique – qui correspond à un état polycristallin donné ⁽¹¹⁾.

La modélisation des polycristaux pertinente à une échelle plus grande que la plus grande taille des grains demande la prise en compte d'éléments matériels contenant un très grand nombre de grains, caractérisés par une distribution d'orientations de texture. Il se pose alors le problème de la nature constitutive de l'interaction entre éléments voisins.

Soit \mathcal{M} la variété des microstructures (les orientations cristallines); supposons \mathcal{M} munie, en tout point $x \in \mathcal{E}$, de la structure d'un espace de probabilité; soit $\mu \in \mathcal{M}$ une variable aléatoire et γ (la fonction de distribution des orientations) sa densité de probabilité.

Il existe deux échelles caractéristiques : celle de l'évolution de γ qui dépend principalement des interactions entre cristaux à l'intérieur de la famille qui est représentée par la distribution de densité γ , et l'échelle de l'interaction entre éléments matériels chacun ayant sa famille d'orientations cristallines. Il est raisonnable de considérer ces dernières interactions comme fonctions du premier moment des distributions d'orientation et de considérer que ces moyennes évoluent suivant des règles générales qui peuvent être introduites dans une théorie multi-champs, alors que l'évolution de la fonction de distribution des orientations à l'intérieur des éléments doit être décrite par une théorie multi-variable (comme il a été fait au §1.2 de ce chapitre).

¹¹Cette section du chapitre reprend le sujet de la publication [12] de la liste donnée à la p. xiii et suiv.

Si on considère les interactions à l'intérieur de l'élément comme faiblement non-locales dans \mathcal{M} , dans le sens de [17], on peut trouver des équations d'évolution pour γ , alors que l'interaction entre voisins dans \mathcal{E} dépend d'une sorte de moyenne sur \mathcal{M} basée sur γ .

Pour obtenir cette moyenne on peut faire appel au théorème de Whitney, qui affirme qu'un espace linéaire \mathcal{S} , de dimension $2m + 1$, existe dans lequel la variété \mathcal{M} , de dimension m , peut être plongée. Le plongement n'est pas unique, et il existe des cas dans lesquels il peut se faire dans un espace de dimension inférieure à $2m + 1$ (par exemple, $SO(3)$, de dimension 3, peut être plongé dans un espace linéaire de dimension 5).

Dans \mathcal{S} on peut évaluer les moyennes de la microstructure ; en général elles tombent à l'extérieur de l'image, $\widehat{\mathcal{M}}$ de \mathcal{M} dans \mathcal{S} , et remplissent l'enveloppe convexe \mathcal{H} de cette image.

Un exemple d'un tel passage est donné par les cristaux liquides nématiques : \mathcal{M} est alors la variété de dimension 2 des directions (la surface de la sphère unité avec identification des antipodes) et un plongement a été proposé dans l'espace des tenseurs symétriques à trace nulle (dimension 5, maximale d'après le théorème de Whitney ; [7, 14]).

Dans le cas des polycristaux le plongement de $SO(3)$ dans un espace linéaire de dimension 7 au plus est le passage qu'il faut assurer avant de poursuivre le développement d'un modèle qui voit la microstructure comme le représentant moyen de caractéristiques géométriques variables dans l'élément matériel.

1.5.2 Plongement de $SO(3)$ dans \mathbb{R}^5

Le théorème dit du « plongement simple » de Whitney (cf. [48]) montre que $SO(3)$ peut être plongé dans \mathbb{R}^7 , mais des plongements dans des espaces linéaires de plus petite dimension sont possibles. Par ailleurs il a été prouvé que $SO(3)$ ne peut pas être plongé dans \mathbb{R}^4 (cf. [13]), alors que on connaît un plongement dans \mathbb{R}^5 . Ce dernier est obtenu par une chaîne d'inclusions différentielles : $SO(3)$ est inclus dans $S^2 \times S^2$ en associant à chaque élément de la matrice orthogonale qui le caractérise n'importe quel couple de colonnes :

$$\begin{bmatrix} c_1^{(1)} & c_1^{(2)} & c_1^{(3)} \\ c_2^{(1)} & c_2^{(2)} & c_2^{(3)} \\ c_3^{(1)} & c_3^{(2)} & c_3^{(3)} \end{bmatrix} \in SO(3) \rightarrow (c^{(1)}, c^{(2)}) \in S^2 \times S^2$$

Une des deux 2-sphères unités S^2 est ensuite incluse dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^2$:

$$c^{(2)} \in S^2 \rightarrow (\xi c_1^{(2)} + \zeta, \xi c_2^{(2)}, \xi c_3^{(2)}) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^2,$$

avec $0 < \xi < \zeta$; donc

$$S^2 \times (]0, +\infty[\times \mathbb{R}^2) = (S^2 \times]0, +\infty[) \times \mathbb{R}^2 \approx (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^5 .$$

Notons que $S^2 \times]0, +\infty[$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ comme on peut le voir, par exemple, en choisissant des coordonnées (ϑ, ϕ) sur S^2 et en prenant les coordonnées polaires correspondantes $c^{(1)} = (\sin \phi \cos \vartheta, \sin \phi \sin \vartheta, \cos \phi)$ on $\mathbb{R}^3 - \{0\}$:

$$(\vartheta, \phi, \rho) \in S^2 \times]0, +\infty[\rightarrow (\rho \sin \phi \cos \vartheta, \rho \sin \phi \sin \vartheta, \rho \cos \phi) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}.$$

On a donc le plongement :

$$\begin{aligned} & \left[c_j^{(i)} \right] \in SO(3) \rightarrow \\ & (c_1^{(1)}(\xi c_1^{(2)} + \zeta), c_2^{(1)}(\xi c_1^{(2)} + \zeta), c_3^{(1)}(\xi c_1^{(2)} + \zeta), \xi c_2^{(2)}, \xi c_3^{(2)}) \in \mathbb{R}^5. \end{aligned}$$

On peut montrer que les conditions $\|c^{(1)}\| = 1$ and $\|c^{(2)}\| = 1$, et la condition $c^{(1)} \cdot c^{(2)} = 0$ correspondent respectivement aux équations ($x \in \mathbb{R}^5$) :

$$\begin{aligned} & (\|x\|^2 - \xi^2 - \zeta^2)^2 + 4\zeta^2(x_4^2 + x_5^2) = 4\xi^2\zeta^2, \\ & x_1(\|x\|^2 - \xi^2 - \zeta^2) + 2\zeta(x_2x_4 + x_3x_5) = 0. \end{aligned}$$

1.5.3 Plongement de $SO(3)$ dans Sym_0

Le plongement décrit dans §1.5.2, connu dans les textes de géométrie différentielle, manque du caractère intrinsèque nécessaire, en principe, pour l'usage dans une théorie physique. Une alternative appropriée se base sur l'introduction d'un tenseur symétrique de classe particulière pour représenter une orientation d'un réseau cristallin.

On souligne dès maintenant que l'application du théorème dans des circonstances physiques ne sera légitime que s'il existe trois directions mutuellement orthogonales, chacune munie d'une longueur caractéristique différente, ayant une signification physique directe dans la description du monocristal dont on cherche à représenter la distribution d'orientations (par exemple les arêtes de la cellule élémentaire dans un cristal orthorhombique).

Soit $\{\mathbf{m}^{(i)} \mid i \in \{1, 2, 3\}\}$, $\|\mathbf{m}^{(1)}\| < \|\mathbf{m}^{(2)}\| < \|\mathbf{m}^{(3)}\|$, les vecteurs représentant le monocristal, leur signe étant sans conséquence pour la description du cristal, normalisés de sorte à avoir

$$\sum_{i=1}^3 (\mathbf{m}^{(i)})^2 = 1.$$

Un polycristal est un agrégat de tels monocristaux, chacun uniquement identifié par le tenseur orthogonal propre \mathbf{Q} donnant la rotation qui superpose trois vecteurs de référence $\{\mathbf{c}^{(i)}\}$ sur les vecteurs du cristal $\{\mathbf{m}^{(i)} / \|\mathbf{m}^{(i)}\|\}$ modulo les rotations de π autour de n'importe quel $\mathbf{c}^{(i)}$; soit $\mathcal{M} \subset SO(3)$ le sous-groupe contenant ces rotations.

Définissons l'application suivante, à partir du même ensemble de mono-cristaux vers l'espace linéaire des tenseurs symétriques

$$\mathbf{S}(\{\mathbf{m}^{(i)}\}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{m}^{(i)} \otimes \mathbf{m}^{(i)};$$

pour tout $\{\mathbf{m}^{(i)}\}$ on a $\text{tr}\mathbf{S} = 1$, $\text{tr}\mathbf{S}^2 = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{m}^{(i)})^4$, et $\det\mathbf{S} = \prod_{i=1}^3 (\mathbf{m}^{(i)})^2$.

Il existe une application un à un différentiable entre l'ensemble des mono-cristaux et les éléments de Sym qui vérifient les conditions données ci-dessus ; en particulier tout \mathbf{S} qui remplit ces conditions a trois valeurs propres distinctes $(\mathbf{m}^{(i)})^2$, avec les vecteurs propres correspondants parallèles aux vecteurs $\mathbf{m}^{(i)}$. La décomposition spectrale d'un tel tenseur \mathbf{S} est alors

$$\mathbf{S}(\{\mathbf{m}^{(i)}\}) = \mathbf{Q}\mathbf{D}^2\mathbf{Q}^T,$$

où \mathbf{D} est la matrice diagonale

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} \|\mathbf{m}^{(1)}\| & 0 & 0 \\ 0 & \|\mathbf{m}^{(2)}\| & 0 \\ 0 & 0 & \|\mathbf{m}^{(3)}\| \end{bmatrix}.$$

Par conséquent

$$\mathcal{M} \approx \left\{ \mathbf{S} \in Sym \mid \text{tr}\mathbf{S} = 1, \text{tr}\mathbf{S}^2 = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{m}^{(i)})^4, \det\mathbf{S} = \prod_{i=1}^3 (\mathbf{m}^{(i)})^2 \right\},$$

et on peut considérer le plongement dans l'espace linéaire :

$$\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{S} \equiv \{ \mathbf{S} \in Sym \mid \text{tr}\mathbf{S} = 1 \}.$$

En conclusion, une distribution de mono-cristaux orthorhombiques peut être représentée par la moyenne :

$$\tilde{\mathbf{S}} := \int_{SO(3)} \gamma(\mathbf{Q})\mathbf{S}(\mathbf{Q}) d(SO(3)).$$

En cas d'ordre parfait, avec tous les cristaux orientés suivant $\hat{\mathbf{Q}}$, alors $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{Q}})$ a trois valeurs propres distinctes et les vecteurs propres correspondants représentent les axes du mono-cristal. Au contraire, si le désordre est complet, alors $\tilde{\mathbf{S}}$ est sphérique et on ne peut pas assigner d'axes privilégiés à la moyenne qui représente la distribution des mono-cristaux. Dans les conditions intermédiaires les propriétés optiques axiales de l'agrégat correspondent au nombre des valeurs propres indépendantes de $\tilde{\mathbf{S}}$.

Ce passage est le premier pas pour aboutir à une connexion, d'une autre nature que celle donnée par la globalisation, et portant sur des considérations statistiques, entre la modélisation du polycristal dans l'espace profond et celle par la théorie des milieux avec microstructure.

Chapitre 2

Contributions à la formulation du problème des matériaux à microstructure contrôlable

2.1 Introduction

L'histoire de la mécanique est celle de l'effort humain par assouvir ses besoins technologiques ⁽¹⁾. Le défi contemporain est donné par l'automatisation et le contrôle des systèmes continus.

Les problèmes d'automatisation des systèmes discrets ont été abordés au début des années 1950. La puissance croissante de calcul a permis l'analyse de systèmes à nombre de paramètres de plus en plus important, mais, en même temps, l'économie implicite dans une modélisation continue est devenue évidente.

On appelle « *contrôlable* » un matériau dont les propriétés physiques peuvent être modifiées par des champs extérieurs (éventuellement non mécaniques).

Notre point de départ est une extension du concept de milieu continu avec microstructure (*cf.* [16]). Un tel milieu se compose de points matériels qui, en conséquence de leur structure physique (sous-jacente à l'échelle de la description mécanique choisie), doivent être décrits comme des systèmes lagrangiens ayant plus de degrés de liberté que les trois translations dans l'espace euclidien dans lequel ils sont placés. A un instant donné – disons, à l'instant actuel – un élément matériel occupe une place $x \in \mathcal{E}$ et est muni d'une microstructure physique dont la description mathématique est obtenue par la donnée de m paramètres d'ordre ν^α ($\alpha \in \{1, \dots, m\}$), qui peuvent être vus comme les coordonnées, dans un carte,

¹Voir la définition de mécanique donnée par Aristote dans son *Art Mécanique*.

d'un élément ν d'une variété différentielle \mathcal{M} de dimension finie m .

L'évolution de la microstructure est réglée par un nombre adéquat d'équations de bilan de sa quantité de mouvement. Dans ces équations on voit apparaître les variables constitutives modélisant les micro-efforts (*cf.* [39, 16]).

Dans les cas ordinaires les lois de comportement des micro-efforts ne font pas appel à des critères d'optimisation ou à des relations de contrôle. Au contraire, c'est dans de pareilles conditions que l'on se place maintenant : les propriétés matérielles contrôlables sont introduites par le biais de k paramètres d'ordre intérieurs κ^β , coordonnées d'un élément κ d'une variété différentielle \mathcal{X} .

La microstructure contrôlable κ peut être modifiée par un opérateur extérieur ; son évolution n'est pas gouvernée par des équations de bilan dynamiques et des lois de comportement « *passif* », mais par un critère d'optimisation ou par une règle de contrôle qui devient une propriété constitutive du milieu. Les limites physiques de la contrôlabilité se traduisent dans ce que la variable κ appartient à un ensemble fermé $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$. L'optimisation sera évaluée par la donnée d'une fonctionnelle \mathcal{J} , par exemple le coût du processus ou son rendement.

Un tel point de vue correspond à une vision phénoménologique du problème. De fait la microstructure κ évolue suivant des équations physiques de bilan sur lesquelles on intervient par des actions extérieures classiques (par exemple on agit sur la structure cristalline d'un alliage à mémoire de forme par le biais d'un champ de température que l'on contrôle par les conditions usuelles au bord ou dans le volume). Dans des telles circonstances on peut faire appel à une théorie multi-champs, décrivant le couplage entre les effets mécaniques macroscopiques et microstructuraux, pour traiter ensuite le problème du contrôle du système couplé par des actions extérieures qui rentrent dans les conditions au bord par des termes d'apport surfacique ou dans les équations indéfinies moyennant des termes d'apport volumique.

Mais parfois, si l'effet direct de la microstructure contrôlable sur les propriétés mécaniques du matériau est important, l'effet inverse peut être négligeable, au moins si l'on envisage la formulation d'un problème mécanique simplifié afin de pouvoir aborder plus aisément le problème du contrôle. Deux cas se présentent dans lesquels une telle simplification paraît acceptable : les matériaux *électro-* ou *magnéto-rhéologiques* et les *gyrocontinus*.

Dans un matériaux électro- ou magnéto-rhéologique il est possible de contrôler l'organisation spatiale d'une phase solide en suspension dans une matrice fluide. Ces matériaux se comportent, en première approximation, comme des corps de Bingham dont la raideur initiale, le seuil d'écoulement visqueux et la viscosité peuvent être modifiés en opérant de l'extérieur (sur le champ électrique ou magnétique). La vitesse de transmission du signal électrique ou magnétique et les temps de réaction du matériau à ce signal autorisent la formulation d'un modèle négligeant les effets du transitoire, tant dans le temps (réaction instantanée) que dans l'espace (contrôle distribuée dans le volume).

Un deuxième exemple de matériau contrôlable dont l'étude du comportement n'introduit que l'analyse du couplage entre champs d'origine mécanique est ce-

lui d'un milieu continu contenant une distribution continue de gyroscopes de très petite taille, que l'on appelle gyrocontinus. L'idée de départ est celle de munir une structure d'un grand nombre de (petits) volants, tournant autour d'axes dont la direction peut éventuellement être contrôlée et avec une vitesse de rotation réglable ; le mouvement de la structure sera alors influencé par les réactions gyroscopiques et donc, dans certaines limites, sera contrôlable. L'énergie qu'il faut fournir ou drainer du système pour le réglage de la vitesse angulaire des volants ou pour le changement d'orientation de leur axe de rotation à l'intérieur des éléments de matière dépend du processus mécanique, mais on peut très bien envisager la recherche de solutions du problème mécanique indépendamment du calcul des besoins énergétiques du système de contrôle du mouvement des volants. Les gyrocontinus peuvent alors être vus comme des matériaux contrôlables au sens que l'on donne à ce mot dans ce chapitre.

Les problèmes de contrôle qui se posent pour un matériaux contrôlable diffèrent sensiblement de ceux qui ont été traités de préférence dans la littérature (voir les travaux de Lions [60]). Lorsque le contrôle agit sur les bords, on a un problème avec conditions aux bords variables, mais avec un système d'équations aux dérivées partielles de nature indépendante de ces conditions, et donc du contrôle. Dans le cas présent, le contrôle est supposé agir sur les équations de comportement, et donc éventuellement sur le type de solution du système. Par exemple si on considère un matériaux électro-rhéologique on sait que, si le champ électrique est en dessous d'un certain seuil, ce matériau se comporte comment un fluide newtonien plutôt que comme un corps de Bingham.

Pour bien voir cette différence dans un cas simple, on peut imaginer une poutre en vibration forcée dont la raideur puisse être contrôlée : les fréquences propres dépendent du contrôle et par conséquent la décomposition modale de la solution en dépend aussi. Si au contraire le contrôle de la poutre se fait en imposant, par exemple, un mouvement approprié à l'un des appuis, les modes propres sont indépendants du contrôle et la solution peut être obtenue en superposant les effets de la charge dynamique imposée et du déplacement optimal de l'appui.

Mes recherches dans le domaine des matériaux contrôlables suivent deux axes, dans le plan de la théorie et dans celui expérimental. Mes études théoriques ont porté essentiellement sur les applications du Principe de Pontryagin aux systèmes continus et, en particulier, aux milieux continus lorsque leur loi de comportements peut être contrôlée. Un exemple particulier traité avec ledit Principe a donné l'idée pour des applications expérimentales (§2.2). Successivement nous avons réalisé un système contrôlé pour l'amortissement des vibrations mécaniques ; ce système a été mis au point d'abord au CERAM-ENPC et ensuite à l'IEI-CNR (§2.3).

Encore sur le plan théorique j'ai analysé le cas des structures contenant un très grand nombre de petits gyroscopes, qui peuvent être vue comme des milieux continus contrôlables par le biais des couples d'inertie de ces gyroscopes (§2.4). Ces structures sont intéressantes pour les applications aérospatiales et fournissent un exemple de matériau contrôlable pour lequel on sait décrire complètement le comportement.

A compter de 2000 nous avons entrepris une nouvelle voie de recherche, pour l'application des méthodes de monitoring et de contrôle au patrimoine culturel. Un des résultats de ces recherches est décrit au §2.5 après une introduction générale au problème, qui diffère de celui des matériaux contrôlables traité dans les parties précédentes de ce chapitre.

2.2 Le Principe de Pontryagin dans les milieux continus

On propose une approche au problème du contrôle optimal des matériaux contrôlables qui trouve sa source dans l'étude de Wang [111] – basée sur le principe de Bellman – généralisant aux systèmes continus le principe de Pontryagin [37]. L'approche est valable au moins lorsque le rendement du processus est exprimé par une fonctionnelle continûment différentiable des coordonnées généralisées du système. Un critère d'optimisation tout à fait équivalent à celui de Wang peut être obtenu par un calcul des variations ⁽²⁾.

On pose le problème en général, on donne l'énoncé d'une condition suffisante pour l'optimisation et finalement on fournit un exemple.

2.2.1 Position du problème

Soit \mathcal{B} le domaine occupé par le corps à l'instant τ ($0 \leq \tau \leq \tau_f$); soit $x = x(x_*, \tau)$ la position actuelle du point matériel dont le placement de référence est $x_* \in \mathcal{B}_*$, $\mathbf{u}(x, \tau) := x - x_*$ son déplacement, $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{u}}$ sa vitesse, \mathbf{b} la force appliquée par unité de masse, $\bar{\mathbf{u}}$ les déplacements imposés à la frontière (on suppose que les conditions au bord soient partout de déplacement imposé); soit \mathbf{T} le tenseur de Cauchy. Les champs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont solution du problème :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{B} \times [0, \tau_f], \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sur } \partial \mathcal{B} \times [0, \tau_f],$$

$$\mathbf{T}(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S}(\mathbf{u}(y, t), \mathbf{v}(y, t), \kappa(y, t), \dots) d(\operatorname{vol}) dt, \quad (2.2)$$

avec le contrôle $\kappa \in \mathcal{K}$ qui doit réaliser le minimum d'une fonctionnelle donnée :

$$\mathcal{J}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \kappa; [0, \tau_f]\} = \int_0^{\tau_f} \int_{\mathcal{B}_\tau} \varphi(x, \tau; \mathbf{u}(x, \tau), \mathbf{v}(x, \tau), \kappa(x, \tau), \dots) d(\operatorname{vol}) d\tau. \quad (2.3)$$

²Cette section du chapitre résume les travaux figurant dans la liste donnée à p. xiii et suiv. avec les numéros [2, 18, 20, 35, 36].

2.2.2 Solution par le Principe de Pontryagin

Le problème posé peut s'écrire en forme intégrale en introduisant des multiplicateurs $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v \in \text{CBV}(\mathcal{B}, \mathcal{V})$ (duales de $\dot{\mathbf{u}}$ et $\dot{\mathbf{v}}$) et en prenant un multiplicateur unitaire pour φ : le problème correspond alors à la recherche des minimum de la fonctionnelle

$$\mathcal{J}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v, \kappa; [0, \tau_f]\} = \int_0^{\tau_f} \int_{\mathcal{B}_\tau} [(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{p}_u + \left(\frac{\text{div} \mathbf{T}}{\rho} + \mathbf{b} - \dot{\mathbf{v}}\right) \cdot \mathbf{p}_v + \varphi] d(\text{vol}) d\tau. \quad (2.4)$$

On introduit la définition

$$\mathcal{H}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v, \kappa\} = \int_{\mathcal{B}_\tau} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_u + \left(\frac{\text{div} \mathbf{T}}{\rho} + \mathbf{b}\right) \cdot \mathbf{p}_v + \varphi] d(\text{vol}); \quad (2.5)$$

le calcul des variations de \mathcal{J} montre que le problème posé se traduit dans les équations canoniques et conditions d'orthogonalité

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{p}_u} &= \dot{\mathbf{u}} \quad ; \quad \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{p}_v} = \dot{\mathbf{v}} \quad ; \quad \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{u}} = -\dot{\mathbf{p}}_u \quad ; \quad \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} = -\dot{\mathbf{p}}_v \quad ; \\ \int_{\mathcal{B}_\tau} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_u d(\text{vol}) \Big|_{\tau=\tau_f} &= \int_{\mathcal{B}_\tau} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_u d(\text{vol}) \Big|_{\tau=0} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \text{ adm.} ; \\ \int_{\mathcal{B}_\tau} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_v d(\text{vol}) \Big|_{\tau=\tau_f} &= \int_{\mathcal{B}_\tau} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_v d(\text{vol}) \Big|_{\tau=0} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v} \text{ adm.} ; \end{aligned} \quad (2.6)$$

et dans la condition suffisante (inégalité de Fourier) :

$$\int_0^{\tau_f} (\mathcal{H}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v, \kappa + \delta \kappa\} - \mathcal{H}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v, \kappa\}) d\tau \geq 0. \quad (2.7)$$

Dans les cas de Pontryagin toute partie d'une trajectoire optimale doit être optimale. La condition (2.7) conduit alors à démontrer le théorème : si pour un contrôle $\hat{\kappa}$ il existe une solution non nulle $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{p}}_u, \hat{\mathbf{p}}_v)$ des équations canoniques de Hamilton (avec conditions initiales données sur $(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ et conditions finales sur $(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ ou sur $(\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v)$) telle que :

$$\mathcal{H}\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{p}}_u, \hat{\mathbf{p}}_v, \hat{\kappa}; \tau\} = \min_{\kappa \in \mathcal{K}} \mathcal{H}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v, \kappa; \tau\} \quad \forall \tau \in [0, \tau_f], \quad (2.8)$$

alors $\hat{\kappa}$ est un contrôle optimal.

2.2.3 Application à l'amortissement

Solution optimale

Le théorème du paragraphe précédent a été appliqué au problème de l'amortissement de vibrations. En particulier on a étudié le cas d'un corps élastique linéaire isotrope oscillant en hypothèse de petites perturbations d'un état d'équilibre

naturel, dans l'hypothèse qu'il existe un contrôle $\kappa \in [-1, 1]$ agissant sur les coefficients de Lamé

$$\mu(\kappa) = \mu_{max} + \mu_{min} + (\mu_{max} - \mu_{min})\kappa \quad (2.9)$$

et que le mouvement soit isochorique (ce qui ne fait que simplifier les passages sans réduire la généralité de la démarche).

On assume que les conditions au bord soient de déplacement imposé et qu'il n'y a pas de forces de volume agissant sur le corps. Le problème à résoudre s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \\ \dot{\mathbf{u}}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x) \\ \mu(\kappa) \Delta \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \in \mathcal{B} \\ \text{dans } \mathcal{B} \times [0, \tau_f] \\ \text{sur } \partial \mathcal{B} \times [0, \tau_f], \end{array} \quad (2.10)$$

avec la fonctionnelle à minimiser

$$\mathcal{J}\{\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \kappa; [0, \tau_f]\} = - \int_0^{\tau_f} \int_{\mathcal{B}} 2\mu(\kappa) \text{symgrad} \mathbf{u} \cdot \text{grad} \dot{\mathbf{u}} \, d(\text{vol}) \, d\tau. \quad (2.11)$$

La condition (2.8) s'applique à la fonctionnelle

$$\mathcal{H}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \kappa\} =$$

$$\int_{\mathcal{B}} \left(\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{p}_v \cdot \text{div} 2(\mu(\kappa) \text{symgrad} \mathbf{u}) - 2\mu(\kappa) \text{symgrad} \mathbf{u} \cdot \text{grad} \mathbf{v} \right) d(\text{vol}) \quad (2.12)$$

qui est minimisée par le contrôle (voir [20] pour les passages)

$$\kappa = \text{sgn}(\text{symgrad} \mathbf{u} \cdot \text{grad} \dot{\mathbf{u}}). \quad (2.13)$$

Le cas des ondes planes permet une illustration simple de ce résultat. Soit ξ la coordonnée dans la direction de propagation de l'onde et ϕ le module du déplacement. On dénote par l'apostrophe la dérivée par rapport à ξ . Le contrôle optimal est

$$\kappa(\xi, \tau) = \text{sgn}(\phi'(\xi, \tau) \dot{\phi}'(\xi, \tau)) = \text{sgn}(|\phi'(\xi, \tau)|) \quad (2.14)$$

il vaut donc $\kappa = 1$ (matériau plus raide) où la déformation ϕ' croît en valeur absolue dans le temps et $\kappa = -1$ où elle décroît. Le changement de signe doit correspondre aux plans en mouvement sur lesquels $\phi' = 0$ ou $\dot{\phi}' = 0$, c'est à dire sur les extremum du déplacement ou de la vitesse suivant la direction de propagation.

Le déplacement ϕ est solution de l'équation

$$\rho \ddot{\phi} - 2\mu \phi'' - 2 \Delta \mu [\text{sgn}(\phi' \dot{\phi}') \phi']' = 0 \quad (2.15)$$

de sorte que, le contrôle optimal $\hat{\kappa}$ étant constant par morceaux, $\hat{\phi}$ a presque partout la forme usuelle d'une onde se propageant en avant ou en arrière avec vitesse de propagation α paramétrée par le contrôle :

$$\hat{\phi}(\xi, \tau) = \zeta_{\rightarrow}(\xi - \alpha(\hat{\kappa})\tau) + \zeta_{\leftarrow}(\xi + \alpha(\hat{\kappa})\tau); \quad \alpha^2(\kappa) = 2\mu(\kappa)/\rho \quad (2.16)$$

Dans le cas des oscillations la solution (2.15) en un point ξ décrit une trajectoire dans le plan $(\phi', \dot{\phi})$ dont toute partie régulière est un arc d'ellipse avec un rapport entre les rayons égal à $\alpha(\kappa)$. Avec le contrôle (2.14) les ellipses appartiennent à l'une des deux familles :

$$\phi^{*\prime}(\xi, \tau)^2 + \left[\frac{\dot{\phi}^*(\xi, \tau)}{c(\pm 1)} \right]^2 = \text{const}, \quad (2.17)$$

chacune occupant deux quarts opposés du plan $(\phi', \dot{\phi})$: toute trajectoire optimale passera d'une famille à l'autre en traversant les axes $\phi' = 0$ et $\dot{\phi} = 0$ de façon à se rapprocher de l'origine. Cela permet d'identifier la trajectoire optimale pour toute condition initiale donnée (cf. figure 2.1).

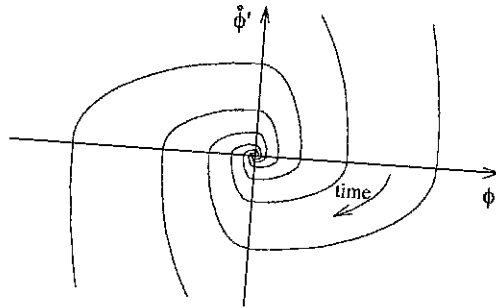


FIG. 2.1 - Trajectoire optimale pour l'amortissement d'ondes élastiques.

Solutions non optimales

La stabilisation du système décrit ci-dessus a été étudiée moyennant la méthode proposé dans [1]. Dans ce cadre la solution optimale donnée au paragraphe précédent peut être obtenue comme « *gradient relay form* » :

$$\ddot{\phi} = -(\bar{\omega} + \gamma \operatorname{sgn}(\phi\dot{\phi}))\phi, \quad (2.18)$$

et des solutions non optimales, mais toujours stabilisantes, peuvent être obtenues comme « *gradient linear form* » :

$$\ddot{\phi} = -(\bar{\omega} + \gamma\omega^2(\phi\dot{\phi}))\phi. \quad (2.19)$$

Le paramètre γ , donnant la vitesse de convergence, ne peut être choisi librement que à l'intérieur du domaine admissible pour les variations de fréquence du système.

La comparaison de la solution (2.19) avec celle optimale (2.18), pour $\bar{\kappa} = 5$, $\kappa \in [4, 6]$ et pour $\bar{\kappa} = 5$, $\kappa \in [1, 9]$ est donnée dans les figures 2.2 et 2.3 respectivement

Remarques

L'observation du résultat montre que le contrôle optimal demande que le matériau soit plus souple pendant que l'énergie élastique est transformée en cinétique,

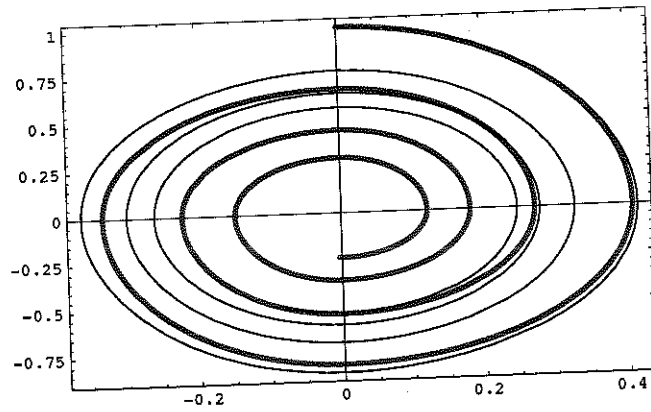


FIG. 2.2 – Solution optimale (en gras) et non pour $\bar{\kappa} = 5$, $\kappa \in [4, 6]$: dans le même intervalle de temps le contrôle optimal réduit de 75% l'amplitude de l'oscillation, alors que le contrôle « *gradient linear form* » la réduit de 50%.

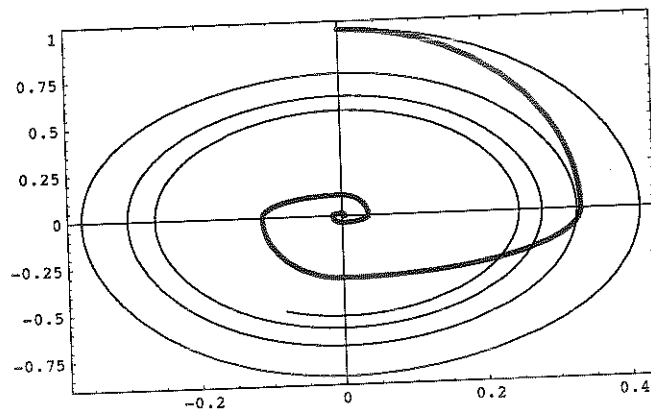


FIG. 2.3 – Solution optimale (en gras) et non pour $\bar{\kappa} = 5$, $\kappa \in [1, 9]$: le contrôle optimal conduit le système presque à repos dans le temps qu'il faut au contrôle « *gradient linear form* » pour réduire l'amplitude de l'oscillation de 50%.

et plus raide pendant le passage inverse. Il doit y avoir un drainage d'énergie hors du matériau lors de ces changements (théoriquement instantanés) de raideur, qui ne peut être expliqué que par l'étude des mécanismes physiques par lesquels on contrôle ce matériau. Cette étude, par sa nature, sort des limites du problème posé dans ce chapitre et demande la recherche de la solution d'un problème d'évolution en théorie multi-champs. En posant le problème du matériaux contrôlable on admet implicitement qu'un échange énergétique puisse avoir lieu entre le matériau et un système extérieur qui contrôle son comportement, mais on présume que la solution du problème du contrôle puisse être poursuivie sans rentrer dans les détails nécessaires pour la modélisation de cet échange.

Le contrôle des vibrations se base habituellement sur l'un des deux principes de fonctionnement suivants :

- 1 l'énergie est dissipée par le biais d'un phénomène irréversible dont les effets peuvent éventuellement être contrôlés,
- 2 l'amplitude des oscillations est réduite en superposant un signal en opposition de phase (le système doit alors être linéaire).

Dans le premier cas on agit sur le comportement du matériau afin de moduler des effets dissipatifs qui demeurent, par leur nature, passifs. Par exemple on utilise des fluides électro-rhéologiques pour fabriquer des circuits hydrauliques contenant des soupapes, sans pièces mécaniques, qui peuvent être activée par un champ électrique. Un autre exemple est l'emploi d'un matériaux thermo-élastique afin de drainer l'énergie du système sous forme thermique.

Dans le deuxième on contrôle le système essentiellement par son bord, moyennant des actionneurs, par exemple, piézo-électriques. Ceux-ci doivent disposer de puissance suffisante pour régir en opposition de phase à la perturbation qu'il faut contrôler.

Le type de contrôle étudié dans cette section du chapitre et l'algorithme suggéré par l'application du théorème de Pontryagin sortent du contexte habituel. Il s'agit de concevoir un système élastique, mais pouvant changer brutalement de raideur ; la réduction de l'énergie des oscillations n'est alors pas lié à une dissipation mécanique (conversion de l'énergie mécanique en énergie thermique, comme dans le cas 1 ci-dessus), ni à l'atténuation géométrique ou au détournement de l'énergie vers sa source (comme dans certain méthodes de contrôle du bruit). Cette réduction est due à la transformation de l'énergie mécanique, lors du changement de raideur, en énergie du champ qui engendre ce changement (par exemple du champ électrique dans un matériaux électro-rhéologique). Pour le fonctionnement de l'algorithme il est donc nécessaire que ce champ puisse dissiper cette énergie.

Dans la section suivante de ce chapitre on présentera le choix possible d'un matériau électro-rhéologique permettant la mise en œuvre de l'algorithme de contrôle que l'on vient de présenter.

2.3 Réalisation d'un amortisseur contrôlable

2.3.1 Les matériaux électro-rhéologiques

Les matériaux électro-rhéologiques (ER dans la suite) sont des suspensions colloïdales de particules diélectriques dans un fluide dont la conductibilité est inférieure à celle des particules⁽³⁾. La charge qui se cumule, dans des telles conditions, à l'interface entre particules et fluide donne aux premières le comportement de dipôles électriques. On observe alors la tendance, sous chargement électrique de la suspension, à la formation de structures spatiales organisées rassemblant les particules et, par conséquent la modification de la réponse mécanique de l'ensemble [8, 9, 38]. Cet effet, nommé d'après Winslow qui le découvrit en 1947, dépend radicalement des propriétés physico-chimiques de l'interface fluide-particule [2, 45, 43, 44, 49, 53, 113]. Des modèles mathématiques ont été proposés, visant essentiellement l'évaluation de la réponse globale d'un ER en partant de la connaissance du comportement des composants et de leur typologie d'agrégation [50, 41, 42, 93, 94, 100, 99, 96, 97, 98, 112]. Des modèles continus ont aussi été proposés [90], mais il n'y a pas encore une théorie universellement acceptée.

Le comportement mécanique des ER dans des champs électriques suffisamment élevés peut se schématiser par un modèle rhéologique de fluide de Bingham : le matériau répond comme un solide élastique linéaire aux sollicitations tangentielles inférieures à un certain seuil et il s'écoule de façon visqueuse si le seuil est atteint. Le seuil en question correspond à la force nécessaire pour casser les chaînes des particules formées sous champ électrique, qui, autrement, permettent la réponse élastique. Au dessous de l'intensité du champ électrique qui cause l'activation du phénomène d'agrégation le matériau se comporte comme un fluide newtonien [116, 117].

De propositions récentes sur l'emploi des ER (ou des magnéto-rhéologiques, *cf.* [12]) comme actionneurs dans des systèmes d'amortissement ou isolement des vibrations se basent essentiellement sur leur fonctionnement en régime d'écoulement visqueux. Dans de telles conditions la réponse du matériau en termes de contrainte est, en première approximation, affine au champ de taux de déformation, avec coefficients de viscosité fonctions croissantes de la tension électrique appliquée. La performance du système en termes de dissipation est alors, au moins dans une plage utile pour les applications, d'autant meilleure que le champ électrique appliqué est grand. Dans certain cas ce champ peut être réglé pour moduler l'amortissement suivant la stratégie de contrôle envisagée [110]. C'est par exemple le cas de l'emploi des ER comme lubrifiants, à viscosité contrôlée, des coussinet d'arbres tournants ; en modifiant la réponse du lubrifiant on peut, par exemple, éviter ou réduire les oscillations nuisibles de l'arbre [31, 32, 56, 75, 76, 77, 78]. Les qualités tribologiques de l'ER doivent alors être prises en compte [59, 58, 83].

Un mode de fonctionnement, considéré optimal, des ER en phase visqueuse est celui nommé « *squeeze flow* » : le fluide est interposé entre deux surfaces planes parallèles se déplaçant suivant leur normale et il est laissé libre de s'écouler

³ Cette section du chapitre résume [2, 48] (voir p. xiii et suiv.).

autrement [10, 21, 66, 51, 68, 69, 67, 92, 101]. La faible compressibilité volumique de la matrice fluide et le rapport entre le volume comprimé et les surfaces par lesquelles l'écoulement est permis engendre une amplification de la vitesse d'écoulement et donc des effets dissipatifs.

D'autres propositions sont relatives à l'emploi des ER comme actionneur de soupapes à haute vitesse d'activation. Le contrôle du mouvement d'un piston se fait alors par l'ouverture et la fermeture de ces soupapes ayant fonction de frein [88, 110, 115, 114]. Dans ce cas le système actif agit sur la transition de phase fluide-solide qui a lieu très rapidement dans les ER.

2.3.2 Le projet d'un amortisseur électro-élastique

La mise en œuvre de l'algorithme de contrôle présenté au §2.2.3 nécessite un système mécanique pouvant changer soudainement de raideur quatre fois dans un période d'oscillation. Par exemple pour amortir une oscillation de fréquence 25 Hz le système doit changer sa raideur tout les 100-ème de seconde avec un temps d'activation du changement inférieur à 1 ms. On remarque que des essais numériques ont montré que l'algorithme est stable pour un retard du changement de raideur inférieur au huitième de cycle, mais le taux d'amortissement obtenu est d'autant plus grand que ce changement se fait à l'instant dû.

Voici les fonctions fondamentales de l'amortisseur qui a été réalisé :

- interface à raideur variable, constitué d'un ER sous tension électrique uniforme jusqu'à $3 \div 5$ kV ;
- interrupteur électronique, avec temps d'activation inférieur ou égal à 10^{-3} s (pour le contrôle de vibrations de fréquence maximale de 25 Hz ;
- processeur suivant l'algorithme de contrôle du §2.2.3 élaborant l'information fournie par des capteurs de déplacement.

Le système qui a été conçu et réalisé est composé de trois parties, une mécanique, une électronique et une informatique, ayant les fonctions décrites ci-dessus.

Du point de vue mécanique l'amortisseur est composé de deux corps pouvant se translater l'un par rapport à l'autre suivant un axe donné. Les deux corps sont électriquement séparés, leur jonction mécanique se fait par une cavité contenant un ER, configurée en trois couronnes cylindriques concentriques, alignées sur l'axe de translation, dont l'épaisseur est de 1 mm. Un mouvement relatif des deux corps entraîne le cisaillement du ER dans les couronnes cylindriques et aussi la déformation d'un système élastique passif auxiliaire.

Le composant principal de la partie électrique du système est un interrupteur, dont les conditions de travail sont celles prévues pour le système. L'interrupteur utilise un tube (triode) pour intervenir sur le champ électrique à haute tension avec une vitesse convenable. L'énergie mécanique contenue dans l'amortisseur à l'instant du changement de raideur du ER est partiellement transformée en énergie du champ électrique et ensuite dissipée par effet Joule sur des résistances prévues à cet effet.

Le lecteur est renvoyé à la note technique citée en début de section, [48], pour une

description détaillée de l'appareillage expérimental conçu et réalisé. Les résultats des essais suivants les algorithmes décrits au §2.2.3 ne sont pas encore disponibles.

2.4 Gyrocontinus : milieux continus munis de micro-gyroscopes

On appelle « *gyrocontinus* » un milieu continu muni d'un grand nombre de (petits) volants, de sorte que son mouvement soit influencé par les réactions gyroscopiques et donc, dans certaines limites, sera contrôlable par le biais de la vitesse angulaire des volants ou par leur orientation dans l'élément de matière ⁽⁴⁾.

Pour la modélisation mathématique d'un tel système on imagine un corps matériel dont tous les éléments sont munis d'un volant ; l'écriture des équations du mouvement de ce corps se fait aisément dans le formalisme des milieux avec microstructure lagrangienne, en considérant un milieu continu dont les points ont les trois degrés de liberté de translation plus trois degrés de liberté liés à la rotation du volant. Le modèle ainsi bâti s'apparente à celui des milieux de Cosserat, mais la nature matérielle de l'axe de rotation qui caractérise les points du milieu modifie de façon importante la structure des équations de bilan par rapport au cas classique.

L'étude contenue en [9] formalise et généralise les idées présentées dans [30, 29] avec une attention particulière au problème du calcul par éléments finis des structures aérospatiales. Ces travaux montrent que l'emploi des gyrocontinus pour l'amortissement des vibrations est quelque peu contraint par la complexité du problème à traiter ; ceci a limité l'intérêt technique vers le développement d'études ultérieures sur ces systèmes. Dans nos travaux nous avons montré que l'application de la théorie générale à des cas particuliers (propagation d'ondes planes, poutres, chaînes lourdes) peut mener à des résultats intéressants, intuitivement moins évidents, dont la retombée technologique mérite d'être explorée.

2.4.1 Équations de bilan

Pour l'écriture des équations de bilan du gyrocontinus, on considère chaque élément matériel du milieu comme composé d'un volant parfaitement rigide et d'une capsule déformable. Les deux composants sont reliés, par des liaisons éventuellement souples et contrôlables, de façon que leurs barycentres coïncident toujours dans le mouvement. L'ensemble des capsules forme l'ossature du milieu : toute capsule est considérée être complètement entraînée par le mouvement macroscopique et on imagine qu'une description affine de sa déformation, coïncidente avec la déformation locale du milieu, suffit. Grâce aux liaisons souples et contrôlables, les volants ne sont que partiellement entraînés par le mouvement

⁴Dans cette section du chapitre on résume les résultats présentés dans les publications figurantes dans la liste donnée à p. xiii et suiv. avec les numéros [9, 23, 24].

des capsules : l'entraînement est considéré complet pour ce qui concerne les translations, mais il dépend des choix du contrôle pour les rotations.

Pour décrire le mouvement des volants, introduisons une direction de référence de l'axe de rotation, le verueur \mathbf{g}_* , et un plan qui contient cette direction, dont la normale est le verueur \mathbf{a}_* . Par définition ces directions sont attachées à la capsule qui soutient le volant. Lorsque le mouvement macroscopique se fait avec gradient \mathbf{F} , la capsule supportant le volant suit ce mouvement et cause donc une rotation d'entraînement $\hat{\mathbf{Q}}$ des axes par rapport auxquels est décrite la rotation du volant :

$$\hat{\mathbf{g}} := \frac{\mathbf{F}\mathbf{g}_*}{|\mathbf{F}\mathbf{g}_*|}, \quad \hat{\mathbf{a}} := \frac{\mathbf{F}^{-T}\mathbf{a}_*}{|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{a}_*|}, \quad (2.20)$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{g}_* + \hat{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{a}_* + (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{g}}) \otimes (\mathbf{a}_* \times \mathbf{g}_*).$$

La rotation absolue des volants est donc donnée par $\mathbf{Q} = \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}}$, où \mathbf{G} est la rotation relative par rapport à la capsule, qui peut être considérée une variable de contrôle. On imagine alors les cas suivants

- 0 rotations relatives complètement libres et éventuellement contrôlées,
- 1 précession relative toujours nulle, vitesse de rotation autour de l'axe de fixation du volant libre et éventuellement contrôlée (Liaison cinématique 1),
- 2 précession relative nulle et vitesse de rotation autour du dit axe constante (Liaison cinématique 2).

Dans le cas 1 et 2 $\hat{\mathbf{g}}$ est un vecteur propre de \mathbf{G} et la vitesse relative du volant \mathbf{w}^r est parallèle à la direction actuelle de l'axe du volant $\mathbf{g} = \hat{\mathbf{g}}$:

$$\mathbf{G} = e^{-\theta \mathbf{e}\hat{\mathbf{g}}}, \quad \mathbf{w}^r = \dot{\theta} \hat{\mathbf{g}}, \quad (2.21)$$

avec θ angle de rotation autour de $\hat{\mathbf{g}}$, mesuré à partir du plan normal à $\hat{\mathbf{a}}$.

Le couple d'inertie par unité de masse en configuration actuelle est

$$\mathbf{b}_{I_g} := (\mathbf{J}\mathbf{w})'; \quad (2.22)$$

\mathbf{J} tenseur d'inertie du volant par unité de masse en configuration actuelle ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$) :

$$\mathbf{J} := \alpha_1 \mathbf{g} \otimes \mathbf{g} + \alpha_2 (\mathbf{I} - \mathbf{g} \otimes \mathbf{g}) \quad (2.23)$$

et \mathbf{w} taux de rotation absolue :

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^r + \mathbf{G}\mathbf{w}^e, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{w}^r := -\frac{1}{2} \mathbf{e} \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^T, \quad \mathbf{w}^e := -\frac{1}{2} \mathbf{e} \dot{\hat{\mathbf{Q}}} \hat{\mathbf{Q}}^T.$$

\mathbf{w}^r s'écrit en fonction de la vitesse angulaire ω et de la vitesse relative de précession $\gamma \mathbf{p}$; \mathbf{w}^e est fonction du gradient de vitesse macroscopique \mathbf{L} ;

$$\mathbf{w} = \omega \mathbf{g} + \gamma \mathbf{g} \times \mathbf{p} - \frac{1}{2} (\mathbf{e} + \mathbf{h}^T) \mathbf{L}, \quad (2.25)$$

où

$$\mathbf{h} := -\hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{e}\hat{\mathbf{g}} - [(\mathbf{e}\hat{\mathbf{g}}) \otimes \hat{\mathbf{g}}]^T + \hat{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{e}\hat{\mathbf{a}} + [(\mathbf{e}\hat{\mathbf{a}}) \otimes \hat{\mathbf{a}}]^T - 2 \text{sym}(\hat{\mathbf{a}} \otimes \hat{\mathbf{g}}) \otimes (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{g}}). \quad (2.26)$$

Les équations de bilan de la quantité de mouvement de translation (macro) et de rotation (micro) et l'équation d'objectivité des efforts intérieurs (ou bilan du moment de la quantité de mouvement micro et macro) en configuration actuelle sont :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} &= \rho \dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \rho \operatorname{div} [\rho (\mathbf{e} + \mathbf{h}) (\mathbf{G}^T \mathbf{b}_{Iq})], \\
-\zeta + \operatorname{div} \mathbf{s} + \rho \beta &= \rho \beta_I, \\
-\bar{\mathbf{z}} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{S}} + \rho \bar{\mathbf{b}}_q &= \rho \bar{\mathbf{b}}_{Iq}, \\
\mathbf{e} \mathbf{T} &= \mathbf{G}^T \mathbf{z} + (\operatorname{grad} \mathbf{G}^T) \mathbf{S},
\end{aligned} \tag{2.27}$$

où \mathbf{T} est la contrainte de Cauchy (qui peut – dans ce cas – ne pas être symétrique), \mathbf{z} est le couple équilibré interne (un vecteur couple par unité de volume), \mathbf{S} est la micro-contrainte (un tenseur d'ordre deux qui donne un couple par unité de surface orientée), \mathbf{b} et $\mathbf{b}_g = \beta \mathbf{g} + \bar{\mathbf{b}}_q$ sont les actions extérieures (force et couple par unité de masse respectivement), $\mathbf{b}_{Iq} = \beta_I \mathbf{g} + \bar{\mathbf{b}}_{Iq}$ est le couple d'inertie due aux volants. Dans l'écriture de (2.27) nous avons utilisé la décomposition géométrique :

$$\begin{aligned}
\mathbf{z} &= \zeta \mathbf{g} + \mathbf{g} \times \bar{\mathbf{z}} - (\mathbf{S} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{g}) \mathbf{g} + 2 \operatorname{skw}[(\operatorname{grad} \mathbf{g}) \mathbf{S}] \mathbf{g}, \\
\mathbf{S} &= \mathbf{s} \otimes \mathbf{g} - (\mathbf{e} \mathbf{g}) \bar{\mathbf{S}},
\end{aligned} \tag{2.28}$$

pour souligner le rôle des composantes axiales et normales à l'axe de rotation des couples agissants sur les volants.

Pour le calcul des réactions aux liaisons décrites précédemment on considère toute action interne comme la somme d'une composante active et une réactive et on impose que la puissance des réactions soit nulle dans tout mouvement permis par les liaisons.

Dans le cas de la liaison cinématique (0), les parties réactives de ζ , \mathbf{s} et \mathbf{S} sont nulles ; les autres réactions possibles, $\overset{r}{\mathbf{T}}$ et $\overset{r}{\bar{\mathbf{z}}}$ (parties réactives de \mathbf{T} et $\bar{\mathbf{z}}$), satisfont l'équation

$$\overset{r}{\mathbf{T}} = \frac{1}{2} (\mathbf{e} + \mathbf{h}) (\mathbf{G}^T (\mathbf{g} \times \overset{r}{\bar{\mathbf{z}}})) . \tag{2.29}$$

On peut alors écrire les équations de bilan (2.27) en faisant apparaître les variables constitutives purement actives que l'on dénote désormais par \mathbf{T} , ζ , \mathbf{s} , $\bar{\mathbf{z}}$, $\bar{\mathbf{S}}$, \mathbf{z} et \mathbf{S} (dans l'équation (2.27) et jusqu'à maintenant les mêmes symboles ont été utilisés pour les variables constitutives contenant éventuellement des réactions ; on allège ainsi la notation, en mettant le lecteur en garde contre toute possible

confusion) :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}[\mathbf{T} - \frac{1}{2}(\mathbf{e} + \mathbf{h})(\mathbf{G}^T(\mathbf{g} \times \bar{\mathbf{z}}))] + \rho \mathbf{b} &= \rho \dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \operatorname{div}[\rho(\mathbf{e} + \mathbf{h})(\mathbf{G}^T \mathbf{b}_{I_g})], \\
-\zeta + \operatorname{div} \mathbf{s} + \rho \beta &= \rho \beta_I, \\
-\bar{\mathbf{z}} - \frac{\dot{\bar{\mathbf{z}}}}{\dot{\bar{\mathbf{z}}}} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{S}} + \rho \bar{\mathbf{b}}_q &= \rho \bar{\mathbf{b}}_{I_q}, \\
\mathbf{eT} &= \mathbf{G}^T \mathbf{z} + (\operatorname{grad} \mathbf{G}^T) \mathbf{S}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Si on considère les hypothèses constitutives :

$$\bar{\mathbf{z}} = 0, \quad \bar{\mathbf{S}} = 0, \quad \mathbf{s} = 0, \tag{2.31}$$

et l'hypothèse sur les conditions de chargement :

$$\bar{\mathbf{b}}_q = 0, \tag{2.32}$$

par la troisième des équations (2.30) on calcule la réaction dans les rotules supportant le volant

$$-\frac{\dot{\bar{\mathbf{z}}}}{\dot{\bar{\mathbf{z}}}} = \rho \bar{\mathbf{b}}_{I_q} = \rho \mathbf{b}_{I_g} \times \mathbf{g}, \tag{2.33}$$

et les équations de bilan se réduisent à (ω^e vitesse angulaire d'entraînement qui, dans les cas imaginés d'intérêt pratique est $\omega^e \ll \omega$) :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}[\mathbf{T} - \frac{1}{2}\rho(\mathbf{e} + \mathbf{h})[\mathbf{G}^T(\mathbf{b}_{I_g} + \mathbf{g} \times \mathbf{b}_{I_g} \times \mathbf{g})]] + \rho \mathbf{b} &= \rho \dot{\mathbf{v}}, \\
-\zeta + \rho \beta &= \rho \alpha_1(\omega + \omega^e), \\
\mathbf{eT} &= \zeta \mathbf{g}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

La seconde des équations (2.34) représente le bilan de la quantité de mouvement de rotation autour de l'axe des volants; par cette équation on peut calculer le couple extérieur β qu'il faut donner pour contrôler la vitesse de rotation du volant. Par exemple, si ζ est due à des pertes visqueuses internes, en prenant $\zeta = -\eta\omega$ et $\dot{\omega}^e \ll \dot{\omega}$, on obtient :

$$\frac{\eta}{\rho} \omega + \beta = \alpha_1 \dot{\omega}. \tag{2.35}$$

Avec la liaison cinématique 2 et dans les hypothèses :

- 1 les volants ont un axe de rotation privilégié : $\alpha_2 \ll \alpha_1$,
- 2 la contribution due au taux de déformation de la capsule dans l'énergie cinétique des éléments matériels est négligeable,
- 3 la composante du taux de rotation absolue sur l'axe gyroscopique est due à la seule vitesse de rotation des volants (qui est très grande par rapport à la composante du taux de rotation d'entraînement sur cet axe),
- 4 le taux de rotation d'entraînement est dû essentiellement au rotationnel du champ de vitesse macroscopique,

5 le taux de variation de ce rotationnel est normal à \mathbf{g} ,
on a $\beta_I = 0$ (le couple extérieur $\rho\beta\mathbf{g}$ doit seulement équilibrer les pertes dues à ζ) et

$$\mathbf{b}_{I_g} \approx \frac{1}{2}\alpha_1\omega\mathbf{g} \times \text{rot}\mathbf{v}, \quad (2.36)$$

et donc $\mathbf{g} \times \mathbf{b}_{I_g} \times \mathbf{g} = \mathbf{b}_{I_g}$. Dans ces conditions la force de volume due aux couples d'inertie des gyroscopes prend la forme simplifiée proposée dans [30, 29] :

$$-\text{div}[\rho(\mathbf{e} + \mathbf{h})(\mathbf{G}^T \mathbf{b}_{I_g})] \approx \frac{1}{2}\text{rot}(\rho\alpha_1\omega\mathbf{g} \times \text{rot}\mathbf{v}). \quad (2.37)$$

L'équation de bilan de la quantité de mouvement de translation (2.34)' devient :

$$\text{div}[\mathbf{T} - \frac{1}{2}\rho\alpha_1\omega\mathbf{e}(\mathbf{g} \times \text{rot}\mathbf{v})] + \rho\mathbf{b} = \rho\dot{\mathbf{v}}; \quad (2.38)$$

en configuration de référence :

$$\text{Div}[\mathbf{P} - \frac{1}{2}\rho_*\alpha_1\omega\mathbf{e}(\mathbf{g}_* \times \text{Rot}\dot{x})] + \rho_*\mathbf{F}^{-T}\mathbf{b} = \rho_*\ddot{x}, \quad (2.39)$$

où $\mathbf{P} = (\det\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-1}$ est la contrainte de Piola-Kirchooff et les lettres majuscules indiquent de dérivations en configuration de référence.

Les équations (2.38) et (2.39) montrent une contribution contrôlable (linéaire par rapport au contrôle ω) sous l'opérateur de divergence, dans l'esprit du problème des matériaux contrôlables posé au §2.1. On imagine aisément que les besoins énergétiques liés aux variations de ω (vitesse angulaire des volants) peuvent être rempli par un système extérieur dont la description n'est pas nécessaire pur la recherche de solutions de contrôle du gyrocontinu. Toujours dans l'esprit du problème introduit au §2.1 et avec les arguments physiques valables énumérés ci-dessus, on a supposé, en choisissant l'expression (2.36) des couples d'inertie gyroscopiques, l'effet inverse (action du champ de vitesse du milieu sur le taux de rotation des volants) négligeable dans l'étude du système, alors que l'effet direct (action du taux de rotation des volants sur le mouvement macroscopique du milieu) n'a pas été négligé.

2.4.2 Ondes planes

On considère un matériau élastique linéaire homogène et isotrope, avec coefficients de Lamé λ et μ , et on étudie les petites perturbations de son état d'équilibre naturel, avec \mathbf{u} champ de déplacement, en négligeant les forces de volume \mathbf{b} et en prenant la loi de comportement $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ (qui est le cas le plus vraisemblable lorsque l'on considère des microstructures artificielles). On se place dans le cas de la Liaison cinématique 2 et on tient compte de l'expression approchée (2.37) de la force d'inertie due aux volants :

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} - \mu\Delta\mathbf{u} - (\lambda + \mu)\text{grad}\text{div}\mathbf{u} - \frac{1}{2}\text{rot}[\frac{1}{2}\mathbf{k} \times \text{rot}\dot{\mathbf{u}} + (\text{grad}\mathbf{k})\dot{\mathbf{u}}] = \mathbf{0}; \quad (2.40)$$

$\mathbf{k} = \rho\alpha_1\omega\mathbf{g}$ est ici la variable de contrôle, que l'on considère constante et uniforme par morceaux. On considère un repère avec le premier axe suivant \mathbf{g} et on cherche

les solutions de (2.40) qui ne dépendent que de x_1 et du temps τ :

$$\begin{cases} \rho u_{1,\tau\tau} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = 0 & , \\ \rho u_{2,\tau\tau} - \mu u_{2,11} - \frac{\rho\alpha_1\omega}{4}u_{3,11\tau} = 0 & , \\ \rho u_{3,\tau\tau} - \mu u_{3,11} + \frac{\rho\alpha_1\omega}{4}u_{2,11\tau} = 0 & , \end{cases}$$

sous la forme ($j \in \{1, 2, 3\}$) :

$$u_j = \exp(\chi_j x_1 + \varsigma\tau), \quad (2.41)$$

avec χ_j et ς nombres complexes vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} \chi_1^2 - \frac{\rho\varsigma^2}{\lambda+2\mu} = 0 & , \\ \chi_2^2 + \frac{\rho\alpha_1\omega\varsigma}{4\mu}\chi_3^2 - \frac{\rho\varsigma^2}{\mu} = 0 & , \\ \chi_3^2 - \frac{\rho\alpha_1\omega\varsigma}{4\mu}\chi_2^2 - \frac{\rho\varsigma^2}{\mu} = 0 & , \end{cases} \quad (2.42)$$

qui donnent :

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \varsigma\sqrt{\frac{\rho}{\lambda+2\mu}}, \\ \chi_2 &= \varsigma\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\sqrt{\frac{1 - \frac{\rho\alpha_1\omega\varsigma}{4\mu}}{1 + (\frac{\rho\alpha_1\omega\varsigma}{4\mu})^2}}, \quad \chi_3 = \varsigma\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\sqrt{\frac{1 + \frac{\rho\alpha_1\omega\varsigma}{4\mu}}{1 + (\frac{\rho\alpha_1\omega\varsigma}{4\mu})^2}}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Si ς est un nombre imaginaire pur, $\varsigma = i\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$, $i^2 = -1$, on obtient $Re[\chi_2] = -Re[\chi_3]$, $Im[\chi_2] = Im[\chi_3]$ et

$$\chi_3 = \sigma\sqrt{\frac{\rho}{2\mu}}\frac{i\sqrt{1 + \sqrt{1 + (\frac{\rho\alpha_1\omega\sigma}{4\mu})^2}} - \sqrt{-1 + \sqrt{1 + (\frac{\rho\alpha_1\omega\sigma}{4\mu})^2}}}{\sqrt{1 - (\frac{\rho\alpha_1\omega\sigma}{4\mu})^2}}, \quad (2.44)$$

et donc $\omega \neq 0 \Rightarrow Re[\chi_j] \neq 0$. Ce résultat montre que si $\omega \neq 0$ solutions du type (2.41) sont toujours possibles, mais avec χ_2 et χ_3 qui ne sont pas des imaginaires purs, ce qui implique une croissance ou une décroissance exponentielle de la solution le long de x_1 . Les parties réelles de χ_2 et χ_3 étant opposées, si la solution décroît en direction de x_2 elle décroît en direction x_3 et vice versa.

Dans la figure 2.4 on trace les parties réelle et imaginaire de la solution (2.44) en fonction de $\frac{\rho\alpha_1\omega\sigma}{4\mu}$; les asymptotes passent par $\frac{\rho\alpha_1\omega\sigma}{4\mu} = \pm 1$.

2.4.3 Chaînes gyrocontinues

Les équations d'équilibre de la chaîne avec volants sont obtenues par intégration des équations du cas tridimensionnel, sous des hypothèses appropriées à la géométrie et à la cinématique de la chaîne.

Soit \mathcal{S}_* un segment de longueur unitaire parallèle, pour fixer les idées, à \mathbf{e}_1 , représentant la fibre moyenne de la chaîne; soit ξ_* une coordonnée sur ce segment. Le mouvement de la chaîne est une application (régulière suivant les

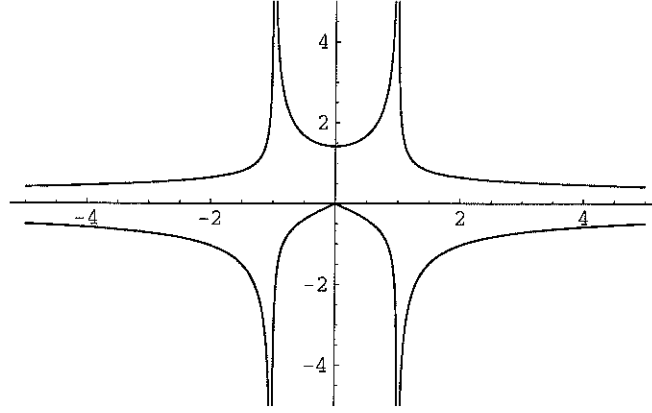


FIG. 2.4 – Courbes $Re\left(\frac{\chi_3}{\sigma}\sqrt{\frac{2\mu}{\rho}}\right)$ (en bas) et $Im\left(\frac{\chi_3}{\sigma}\sqrt{\frac{2\mu}{\rho}}\right)$ (en haut) en fonction de $\frac{\rho\alpha_1\omega\sigma}{4\mu}$.

nécessités usuelles) de \mathcal{S}_* à la configuration actuelle \mathcal{S} ; soit ξ la coordonnée curviligne sur \mathcal{S} .

Pour décrire le même corps comme un milieu tridimensionnel, soit $x_* \in \mathcal{B}_*$ et $x \in \mathcal{B}$ les emplacements de référence et actuels de ses points. Les deux représentations sont reliées par $x_{*1} \equiv \xi_*$. Pour tout $\xi_* \in \mathcal{S}_*$ la section droite $\mathcal{A}_*(\xi_*)$ est l'ensemble des particules $(\xi_*, x_{*2}, x_{*3}) \in \mathcal{B}_*$.

On fait l'hypothèse qu'il n'y a pas d'actions extérieures agissant sur la surface des sections droites et que la masse de chaque section se conserve. Pour simplifier davantage le problème on considère la densité de masse uniforme en configuration de référence. L'intégration de (2.39) sur la surface $\mathcal{A}_*(\xi_*)$ conduit à l'introduction des fonctions de ξ_* et du temps suivantes : tension \mathbf{n} , densité de masse par unité de longueur $\tilde{\rho}_*$ (constante par hypothèse), force massique $\tilde{\mathbf{b}}$ et position du barycentre des sections droites $\tilde{\mathbf{x}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &:= \int_{\mathcal{A}_*} \mathbf{P} \mathbf{e}_1 d(\text{area})_*, \\ \tilde{\rho}_* &:= \int_{\mathcal{A}_*} \rho_* d(\text{area})_*, \\ \tilde{\mathbf{b}} &:= \frac{1}{\tilde{\rho}_*} \int_{\mathcal{A}_*} \rho_* \mathbf{F}^{-T} \mathbf{b} d(\text{area})_*, \\ \tilde{\mathbf{x}} &:= \frac{1}{\tilde{\rho}_*} \int_{\mathcal{A}_*} \rho_* \mathbf{x} d(\text{area})_*. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Le bilan de la quantité de mouvement s'écrit (les dérivées par rapport à ξ_* sont notées par l'indice 1 ; on négligera désormais l'écriture de l'indice 1 dans la première valeur propre du tenseur d'inertie des volants et on prendra α toujours constant) :

$$\mathbf{n}_{,1} + \tilde{\rho}_* \tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\rho}_* \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}_*} \rho_* \alpha \text{Div}[\omega \mathbf{e}(\mathbf{g}_* \times \text{Rot } \dot{\mathbf{x}})] d(\text{area})_*. \quad (2.46)$$

Par hypothèse les axes de rotation des volants suivent la direction tangente à la chaîne :

$$\mathbf{g}_* = \frac{d\tilde{x}_*}{d\xi_*} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \xi}. \quad (2.47)$$

Supposons la chaîne en équilibre dans sa configuration de référence et considérons des petits déplacements $\mathbf{u} = \tilde{x} - \tilde{x}_*$ autour de cette configuration ; soit \mathbf{e}_1 l'axe vertical (dirigé vers le haut), γ l'accélération de la gravité et $\tilde{\mathbf{b}} = -\gamma\mathbf{e}_1$. L'expression simplifiée de la force due à l'inertie des volants est alors :

$$-\frac{1}{2}\alpha \operatorname{rot}(\omega \mathbf{g} \times \operatorname{rot} \dot{x}) = \frac{1}{2}\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ -(\omega \dot{x}_{3,1})_{,1} \\ (\omega \dot{x}_{2,1})_{,1} \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

La première équation scalaire (2.46) ci-dessus donne $n_1 = \tilde{\rho}_*(\gamma_0 + \gamma x_1)$ ($\tilde{\rho}_*\gamma_0$ étant une charge donnée à l'extrémité de la chaîne) ; en prenant

$$\mathbf{n} = n_1 \begin{bmatrix} 1 \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

les deux autres équations deviennent (l'indice de dérivée τ dénote une dérivée partielle par rapport au temps) :

$$\begin{cases} u_{2,\tau\tau} + [(\gamma_0 + \gamma x_1)u_{2,1}]_{,1} + \frac{1}{2}\alpha(\omega u_{3,1\tau})_{,1} = 0, \\ u_{3,\tau\tau} + [(\gamma_0 + \gamma x_1)u_{3,1}]_{,1} - \frac{1}{2}\alpha(\omega u_{2,1\tau})_{,1} = 0. \end{cases} \quad (2.50)$$

Dans ces équations, ω est une fonction de contrôle.

Si on cherche des solutions en forme d'onde à vis :

$$u_2 = \cos(\lambda x_1 - \varsigma \tau), \quad u_3 = \sin(\lambda x_1 - \varsigma \tau), \quad (2.51)$$

avec λ et ς nombres complexes, on obtient les équations du contrôle qui permet la propagation, avec vitesse ς , d'ondes de ce type :

$$\omega = \frac{2\gamma}{\alpha\varsigma} + \omega_0 \quad (2.52)$$

(ω_0 constante réelle arbitraire) et les courbes de dispersion (voir figure 2.5) :

$$\lambda = \pm i \frac{\varsigma}{\sqrt{\gamma_0 - \frac{1}{2}\alpha\varsigma\omega_0}}. \quad (2.53)$$

Il faut noter que des ondes de longueur infinie peuvent se propager à vitesse finie si $\omega_0 = \frac{2\gamma_0}{\alpha\varsigma}$; des oscillations résultent pour des ω_0 plus grand si $\varsigma \in \mathbb{R}$.

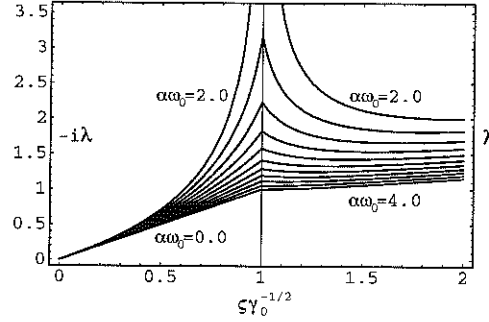


FIG. 2.5 – Courbes de dispersion de la chaîne lourde contrôlée; à droite de la ligne $\zeta/\sqrt{\gamma_0} = 1$ on reporte les cas des ondes ayant une longueur d'onde réelle pour $\frac{1}{2}\alpha\omega_0 \in \{1.0, 1.1, 1.2, \dots, 1.9, 2.0\}$, à gauche de cette même ligne on a les cas avec longueur d'onde imaginaire pour $\frac{1}{2}\alpha\omega_0 \in \{0.0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0\}$.

2.4.4 Poutres gyrocontinues

Considérons une poutre d'Euler-Bernoulli, en hypothèse de petites perturbations, c'est à dire, si u est le déplacement et x_1 l'axe de la poutre :

$$\begin{cases} u_1 = \bar{u}_1 - \bar{u}_{3,1}x_3 - \bar{u}_{2,1}x_2 \\ u_2 = \bar{u}_2 \\ u_3 = \bar{u}_3 \end{cases} ; \bar{u} = \bar{u}(x_1, \tau). \quad (2.54)$$

En prenant x_2 et x_3 axes principaux d'inertie, avec comme origine le centre de gravité de la section, en appelant ρ_2 et ρ_3 les rayons d'inertie de la section droite, E le module d'Young du matériau constituant, en négligeant l'inertie de rotation des sections droites de la poutre et en prenant la forme simplifiée des forces d'inertie gyroscopiques qui est valable lorsque les axes des volants suivent des directions matérielles et si leur taux de rotation est constant dans le temps et uniforme dans l'espace (Liaison cinématique 2), on obtient les deux équations du mouvement latéral de la poutre :

$$\begin{cases} \bar{u}_{2,\tau\tau} + \frac{E\rho_3^2}{\rho} \bar{u}_{2,1111} + \frac{1}{2}\alpha\omega \bar{u}_{3,11\tau} = 0, \\ \bar{u}_{3,\tau\tau} + \frac{E\rho_2^2}{\rho} \bar{u}_{3,1111} - \frac{1}{2}\alpha\omega \bar{u}_{2,11\tau} = 0. \end{cases} \quad (2.55)$$

Si la poutre est simplement appuyée aux extrémités $x = 0$ et $x = \bar{x}$, ses oscillations auront une longueur d'onde qui sera une fraction entière de \bar{x}/π :

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 &= \exp\left(\pm i \frac{\iota_2 \pi x}{\bar{x}} + \frac{\tau}{\bar{\tau}_2} \pm i \sigma_2 \tau\right), \\ \bar{u}_3 &= \exp\left(\pm i \frac{\iota_3 \pi x}{\bar{x}} + \frac{\tau}{\bar{\tau}_3} \pm i \sigma_3 \tau\right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

(ι_2 et $\iota_3 \in \mathbb{Z}$, $\bar{\tau}_2$, $\bar{\tau}_3$, σ_2 et $\sigma_3 \in \mathbb{R}$).

Les équations (2.55) donnent :

$$\frac{1}{\bar{\tau}_2} = \frac{\alpha\omega}{2} \left(\frac{\iota_3\pi}{\bar{x}}\right)^2 \frac{\sigma_3}{\sigma_2}, \quad \frac{1}{\bar{\tau}_3} = -\frac{\alpha\omega}{2} \left(\frac{\iota_2\pi}{\bar{x}}\right)^2 \frac{\sigma_2}{\sigma_3},$$

$$\begin{cases} \frac{E\rho_3^2}{\rho} \iota_2^4 + \left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)^2 (\frac{\sigma_3}{\sigma_2})^2 \iota_3^4 + 2\left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)^2 \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \iota_3^2 \iota_2^2 = \left(\frac{\bar{x}}{\pi}\right)^4 \sigma_2^2, \\ \frac{E\rho_2^2}{\rho} \iota_3^4 + \left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)^2 (\frac{\sigma_2}{\sigma_3})^2 \iota_2^4 + 2\left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)^2 \frac{\sigma_3}{\sigma_2} \iota_2^2 \iota_3^2 = \left(\frac{\bar{x}}{\pi}\right)^4 \sigma_3^2. \end{cases} \quad (2.57)$$

La première équation donne le temps caractéristique de l'amortissement ou de l'excitation des vibrations (τ_2 et τ_3 étant de signe opposé les mouvements seront amortis dans une direction et excités dans l'autre). L'effet gyroscopique croît en progression géométrique avec le mode.

Le deuxième couple d'équations dans (2.57) donne les fréquences σ_2 et σ_3 , pour (ι_2, ι_3) donnés dans \mathbb{Z}^2 . Des solutions synchrones des deux mouvements orthogonaux existent sous la condition :

$$\sqrt{\frac{E\rho_3^2}{\rho}} > \frac{\alpha\omega}{2} > \sqrt{\frac{E\rho_2^2}{\rho}} \quad (2.58)$$

ou

$$\sqrt{\frac{E\rho_3^2}{\rho}} < \frac{\alpha\omega}{2} < \sqrt{\frac{E\rho_2^2}{\rho}}, \quad (2.59)$$

leur longueurs d'onde satisfont la condition :

$$\iota_2^4 \sqrt{\frac{E\rho_3^2}{\rho} - \left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)^2} = \iota_3^4 \sqrt{-\frac{E\rho_2^2}{\rho} + \left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)^2}, \quad (2.60)$$

que l'on peut comparer avec celle du cas $\omega = 0$:

$$\frac{\iota_2}{\iota_3} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_3}}. \quad (2.61)$$

Un type particulier de solution est avec des temps caractéristiques égaux (en valeur absolue) :

$$|\bar{\tau}_2| = |\bar{\tau}_3| = \bar{\tau} \quad \Rightarrow \quad \iota_3\sigma_3 = \pm\iota_2\sigma_2; \quad (2.62)$$

qui entraîne (cf. (2.57)) :

$$\begin{cases} \left[\frac{E\rho_3^2}{\rho} + \left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)^2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right)^2 \left(1 + 2\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) \right] \iota_2^4 = \left(\frac{\bar{x}}{\pi}\right)^4 \sigma_2^2, \\ \left[\frac{E\rho_2^2}{\rho} + \left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)^2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right) \right] \iota_3^4 = \left(\frac{\bar{x}}{\pi}\right)^4 \sigma_3^2. \end{cases} \quad (2.63)$$

Si la poutre est également rigide dans toute direction $\rho_2 = \rho_3 = \bar{\rho}$, il existe des solutions de type 2.63; alors $\sigma_2 = \sigma_3 = \bar{\sigma}$, $\iota_2 = \iota_3 = \bar{\iota}$ et (voir figure 2.6) :

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{\bar{\iota}\pi}{\bar{x}}\right)^2 \sqrt{\frac{E\bar{\rho}^2}{\rho} + 3\left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)^2}. \quad (2.64)$$

Des ondes à vis, c'est à dire des ondes du type

$$u_2 = \cos\left(\frac{l\pi x}{\bar{x}} \pm \sigma\tau\right), \quad u_3 = \sin\left(\frac{l\pi x}{\bar{x}} \pm \sigma\tau\right), \quad (2.65)$$

avec courbes de dispersion (voir figure 2.7) :

$$\varsigma = \pm l^2 \left(\frac{\pi}{\bar{x}}\right)^2 \left(\frac{\alpha\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha\omega}{2}\right)^2 + \frac{E\bar{\rho}^2}{\rho}}\right), \quad (2.66)$$

peuvent se propager dans ces poutres.

Il faut noter que tout choix de $\omega > 0$ donne deux ondes à vis se propageant en avant le long de la poutre et deux se propageant en arrière ; si on les indique par les indices A et B :

$$\frac{l_A^2}{|\varsigma_A|} \frac{|\varsigma_B|}{l_B^2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{E\bar{\rho}^2}{\rho} \left(\frac{2}{\alpha\omega}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{E\bar{\rho}^2}{\rho} \left(\frac{2}{\alpha\omega}\right)^2}}. \quad (2.67)$$

2.5 Monitoring et contrôle des bâtiments historiques

2.5.1 Introduction

La réhabilitation et la conservation des ouvrages historiques, en particulier des bâtiments anciens, se confrontent souvent au besoin de conservation des traces que l'histoire a marquées sur leur structure, témoignant de leur vie et lui donnant le sens de véritables documents historiques dont la fonction doit être conservée⁽⁵⁾.

⁵Les sujets présentés dans ce chapitre font l'objet des publications figurantes dans la liste donnée à p. xiii et suiv. avec les numéros [30, 13, 32, 34, 37].

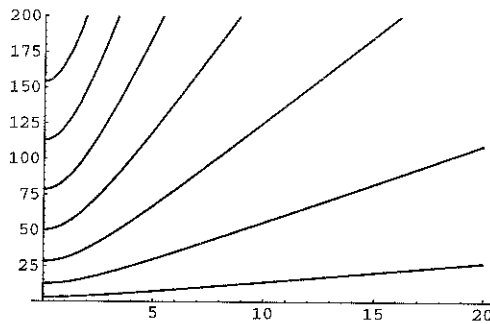


FIG. 2.6 – Tracé de la courbe $\bar{x}^2 \sqrt{\frac{\rho}{E\bar{\rho}}} \bar{\sigma}$ en fonction de $\sqrt{\frac{\rho}{E\bar{\rho}}} \alpha\omega$ for $\bar{l} = 1, \dots, 7$.

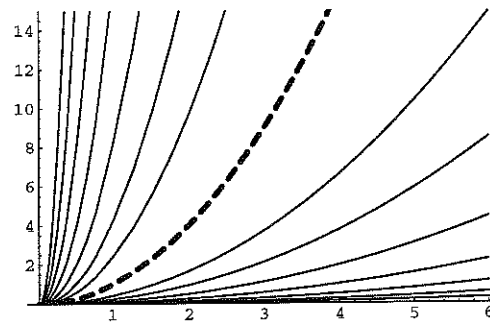


FIG. 2.7 – Tracé de la courbe $\frac{|s|}{\rho} \sqrt{\frac{P}{E}}$ en fonction de $l \frac{\pi}{x}$ for $\frac{\alpha}{4\rho} \sqrt{\frac{P}{E}} \omega \in \{0, 2^0, \dots, 2^6\}$. La ligne en petits traits gras est relative au cas $\omega = 0$; pour $\omega \rightarrow \infty$ on a les deux solutions limites $\zeta = 0 \forall l$ et $l = 0 \forall \zeta$.

Dans ce cadre apparaît le besoin d'une approche nouvelle de la réhabilitation des structures anciennes, capable de conserver – tant que possible – leurs dégradations et même leur défaut de construction et de conception, afin de laisser aux générations suivantes des traces les plus intègres que possible du passé.

Cette approche peut faire appel aux développements les plus récents des applications de l'électronique et de l'informatique à la mécanique des structures et des matériaux, en employant des systèmes actifs et des systèmes de monitoring continu pour le contrôle de ces structures. Dans ce cadre j'ai organisé et suivi le projet *Firmitas* à l'Institut pour l'Élaboration de l'Information du Conseil National des Recherches Italien, visant au projet et à la réalisation de systèmes de monitoring et contrôle de bâtiments anciens, avec applications à des cas particuliers. Parmi ces cas il a été traité celui de la voûte en maçonnerie du Salon du *Maggior Consiglio* dans le Palais Ducal de Gènes qui sera l'objet de cette section du chapitre.

La réhabilitation structurelle des bâtiments anciens en maçonnerie demande souvent l'introduction de structures auxiliaires dont la compatibilité avec les éléments existants devient crucial. Par exemple les liaisons entre les deux structures doivent être prévue pour éviter des concentrations de contrainte, de la localisation de l'endommagement, etc.

L'attention croissante aux structures auxiliaires contrôlées (voir par exemple [81]) est alors motivée par le besoin de répondre à des conditions de chargement peu quantifiables. L'emploi de telles structures demande la définition d'une stratégie de contrôle et le projet d'un système capable de mettre en œuvre ladite stratégie. En général des algorithmes basés sur le retour d'information du système (feedback) sont nécessaires à cause de la faible capacité prévisionnelle des modèles mathématiques disponibles pour les structures plus complexes en maçonnerie et pour le manque d'information sur la constitution de ces structures.

En tout cas, à cause du comportement en général non linéaire des structures en objet, un modèle mathématique performant doit être inclus dans le système de contrôle, à fin de prévoir les effets des actions de contrôle sur la structure avant

leur application. En fait ces actions doivent être contraintes pour éviter qu'elles n'entraînent des dégradations de la structure.

2.5.2 Le contrôle de la voûte du Salon du *Maggior Consiglio* dans le Palais Ducal de Gènes

Historique et introduction du problème

La voûte du Salon du *Maggior Consiglio* dans le Palais Ducal de Gènes fut construite suite à la destruction par un incendie d'une grande partie du Palais en 1777. Pour réduire la vulnérabilité au feu du nouveau bâtiment, l'architecte Simone Cantoni projeta une structure entièrement en maçonnerie pour couvrir la surface de 17 m × 35 m de la Grande Salle du Palais; pour des raisons techniques et artistiques deux voûtes superposées furent prévues et construites. Mais déjà en 1783 la voûte intérieure (ayant fonction de plafond) donna des signes de faiblesse et des tassements localisés apparaissent. Quatre tirants furent alors mis en place pour réduire la poussée des arcs supérieurs sur le mur de la façade Sud du Palais soutenant la voûte.

En supposant que cette poussée soit la cause des abaissements qui se poursuivent dans le temps, la couverture extérieure en maçonnerie fut démontée en 1861, alors que Ignazio Gardella projeta et réalisa un toit avec structure en treillis métallique. Les quatre arches de la voûte intérieure restant en place furent reliés au treillis en dessus avec des tirants en acier, la façade fut modifiée pour inclure des contreforts en forme de colonnade. Bien que ralentie, la dégradation de la voûte du plafond ne fut pas arrêtée.

En 1992, lors de la dernière réhabilitation de la structure, les murs supportant la voûte furent renforcés par un chaînage, par des injections et par des micropoteaux; des poutres auxiliaires en treillis furent interposées entre la voûte du XVII^e et le toit du XIX^e siècle et reliées à la première par un nombre élevé de tirants en ressort (*cf.* [23, 82]).

Aujourd'hui, bien que le risque de rupture soit raisonnablement réduit, on observe un endommagement progressif des plâtres du plafond. Une campagne de mesure menée en 1992 a montré une corrélation importante entre les mouvements de la voûte et la température extérieure : le confinement latéral réalisé par les murs et le chaînage contraint la voûte à se déplacer essentiellement en vertical, localisant ainsi la déformation dans les zones endommagées (ayant la courbure la plus élevée).

Pour réduire la progression du dommage, on peut imaginer la mise en place d'un système de contrôle actif qui, en réagissant aux variations de température extérieure, agisse sur la voûte moyennant des tirants actifs mis à la place des ressorts qui relient actuellement la voûte à la structure auxiliaire construite en 1992.

On a étudié la faisabilité d'un tel contrôle avec un résultat positif. A cette fin on

a établi un modèle de calcul aux éléments finis de la structure (sous contrainte de réduction du nombre de degrés de liberté pour inclusion dans un système de contrôle fonctionnant en situs), on a défini une stratégie du contrôle et on a évalué les effets du contrôle sur les déplacements et sur les contraintes de la voûte dans un cycle thermique représentatif d'une année de vie de la structure.

Dans la suite de cette section on donne les éléments fondamentaux des passages décrits ci-dessus.

Modèle de calcul aux éléments finis

Description de la structure Un modèle aux éléments finis de la structure doit être défini afin de pouvoir mener les calculs en ligne nécessaires pour l'algorithme de contrôle. Désirant donc minimiser l'effort de calcul, on se restreint à la modélisation d'une section droite de la voûte, des murs supportant celle-ci jusqu'au niveau de l'étage de la Salle, et d'une poutre de la structure auxiliaire, en hypothèse de petites perturbations et de déformations planes et en statique.

La structure de 1778 se compose de six nervures en arc à trois centres, appuyées sur les grands cotés de la Salle, dont deux couples centraux partagent la voûte en trois parties de surface presque égale ; des nervures en arc butant relient chacune des deux autres nervures aux murs des petits cotés de la Salle. Des voiles de maçonnerie couvrent les surfaces entre nervures. Chacun des deux couples de nervures centrales a subi une déflexion importante du côté de la façade, suivie par les voiles voisins, de sorte que deux bosses (avec concavité vers le haut) sont visibles dans la voûte. On considère une section de cette structure contenant une nervure ; la maille en éléments finis est constituée d'éléments triangulaires à six nœuds et est divisée en cinq portions avec direction d'anisotropie différente (cette direction est radiale dans la courbe de la voûte ; voir le §2.5.2 ci-dessous pour plus d'explications sur l'anisotropie).

La structure auxiliaire construite en 1992 se compose de poutres d'acier en treillis, posées chacune sur chaque nervure de la voûte. Ces poutres sont rotulées aux extrémités et reliées par des plaques en acier au chaînage en béton armé placé au sommet des murs soutenant la voûte. Le treillis surmontant une nervure est modélisé par des éléments de poutre d'Euler-Bernoulli avec sept nœuds.

On envisage la collocation de dix actionneurs de force (vérins hydrauliques, par exemple) pour relier chaque poutre à la nervure sous jacente. Ces actionneurs sont modélisés comme des barres pré-tendues de faible raideur ; les pré-tensions jouent le rôle de variables de contrôle et sont supposées limitées (en valeur absolue) pour des raisons de sécurité de l'encrage des barres à la voûte.

La structure du toit n'est représentée que par les efforts statiques qu'elle transmet au dits murs (forces verticales de 22.450 kN et poussées horizontales de 47.069 kN). Des ressorts sont introduits aux contours pour représenter de façon approchée l'effet de confinement latéral donné par le chaînage (raideur 1.857 MN/m), la colonnade de la façade (ayant fonction de butée), les structures voisines de la Salle du *Minor Consiglio* et les murs sous l'étage de la Salle (raideur 91.937 MN/m).

Le schéma statique adopté est donné en figure 2.8.

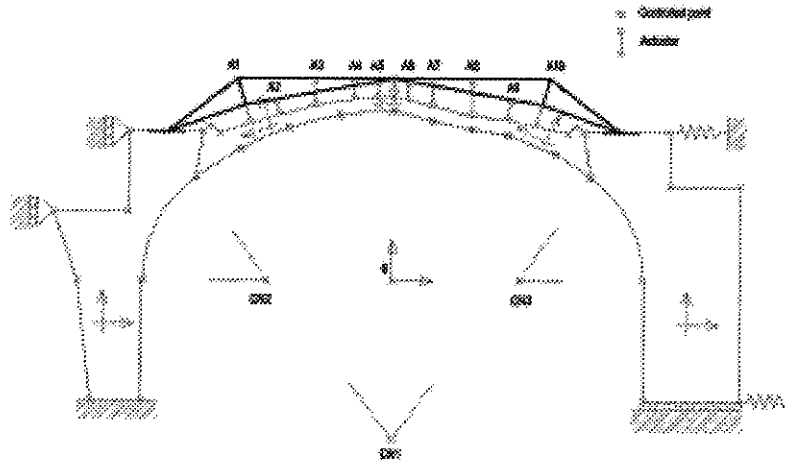


FIG. 2.8 – Schéma statique de la voûte.

Matériau Le modèle de comportement que l'on adopte pour la maçonnerie est celui d'un matériau élastique homogène anisotrope, avec un axe d'orthotropie dirigé suivant la normale aux lits de mortier. Ce modèle a été obtenu par une étude s'appuyant sur l'homogénéisation à la Voigt du comportement d'un matériau élastique stratifié, sous l'hypothèse que la contrainte dans les lits de mortier soit uniforme dans l'épaisseur (*cf.* [30]). (Des études sur un modèle plus riche de ce matériaux, mais suffisamment simple pour une introduction dans des calculs de grande taille, ont été présentées dans [30, 26]).

Les phénomènes non élastiques sont exclus à priori de l'analyse, car on estime le contrôle capable de maintenir la structure, sous les chargements étudiés, dans les limites des processus réversibles.

On dénote par A et B les deux couches types constituant la maçonnerie, rangées de briques et lit de mortier respectivement ; λ et μ seront les constantes de Lamé, η_A et η_B les fractions volumiques des constituants ($\eta_A + \eta_B = 1$). Le tenseur de souplesse élastique du matériau homogénéisé est

$$\mathbf{S}_H = (1 - \eta_B) \mathbf{S}_A + \eta_B \mathbf{S}^*, \quad (2.68)$$

où

$$\mathbf{S}_A = \frac{1}{2\mu_A} \mathbf{I} - \frac{\lambda_A}{2\mu_A(2\mu_A + 3\lambda_A)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (2.69)$$

(I et \mathbf{I} tenseurs identité du second et du quatrième ordre respectivement) et

$$\begin{aligned} S_{1111}^* &= S_{2222}^* = S_{1122}^* = \frac{\mu_B(2\mu_B+3\lambda_B)}{\phi^2}, \\ S_{1133}^* &= S_{2233}^* = \frac{\mu_B(2\mu_B+3\lambda_B)}{\phi\vartheta(2\mu_B+\lambda_B)}, \\ S_{3333}^* &= \frac{\mu_B+\lambda_B}{\varphi^2} + \frac{2\lambda_B}{\varphi\vartheta} + \frac{2\mu_B+\lambda_B}{\vartheta^2}, \\ S_{1313}^* &= S_{2323}^* = \frac{1}{2\mu_B}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

toute autre composante de \mathbf{S}^* étant donnée par symétrie ou nulle, et où

$$\begin{aligned} \phi &:= \frac{2\mu_A(2\mu_A+3\lambda_A)(\lambda_B^2-(\mu^*+\lambda^*)(\lambda_B+2\mu_B))}{\lambda_A^2(\lambda_B+2\mu_B)}, \\ \varphi &:= \frac{\mu_A(2\mu_A+3\lambda_A)(\lambda_B^2-(\mu^*+\lambda^*)(\lambda_B+2\mu_B))}{\lambda_B\mu_A(2\mu_A+3\lambda_A)-\lambda_A(\mu_A+\lambda_A)(\lambda_B+2\mu_B)}, \\ \vartheta &:= \frac{\mu_A(2\mu_A+3\lambda_A)(\lambda_B^2-(\mu^*+\lambda^*)(\lambda_B+2\mu_B))}{\lambda_B\lambda_A(\mu_A+\lambda_A)-\mu_A(2\mu_A+3\lambda_A)(\mu^*+\lambda^*)}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Les résultats numériques objet de cette section du chapitre ont été obtenus en considérant des rangées de briques de 12 cm d'épaisseur, des lits de mortier de 5 mm, et les valeurs suivantes des coefficients d'élasticité des deux matériaux : $\mu_A = 980$ MPa, $\lambda_A = 654$ MPa, $\mu_B = 29$ MPa, $\lambda_B = 0$ (en termes de module d'Young et de rapport de Poisson nous avons : $E_A = 2.352$ GPa, $E_B = 0.060$ GPa, $\nu_A = 0.20$, $\nu_B = 0$).

Les autres paramètres caractéristiques de la maçonnerie et de l'acier utilisés dans les calculs sont :

Maçonnerie :	
densité	2000 kg m ⁻³ ,
coefficient d'expansion thermique	8 · 10 ⁻⁶ °C ⁻¹ ,
conductivité	0.81 J °C ⁻¹ m,
Acier :	
module d'Young	2.1 · 10 ² GPa,
rapport de Poisson	0.3,
densité	7865 kg m ⁻³ ,
coefficient d'expansion thermique	10 · 10 ⁻⁶ °C ⁻¹ .

Conditions de chargement Le seul chargement extérieur, en excluant le contrôle, est de nature thermique. On considère des variations de température sinusoïdales représentant un cycle de l'hiver à l'été. Les conditions extrême du cycle sont, en °C :

	H	E
temp. Salle	15	20
temp. grenier	-5	40
temp. extérieure	-5	30

Problème et algorithme de contrôle

Position du problème Soit \mathbf{u} la liste des déplacements généralisés de la structure, \mathbf{K} sa matrice de raideur, \mathbf{f} la liste des forces généralisées agissant sur la structure. On considère une partition des degrés de liberté, avec indice u pour les degrés sur lesquels le contrôle agit directement, x pour les degrés que l'on veut contrôler, et s pour les autres.

La matrice de raideur et les listes des forces et des déplacements sont ainsi divisées en blocs :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ux} & \mathbf{K}_{us} \\ \mathbf{K}_{ux}^T & \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}_{xs} \\ \mathbf{K}_{us}^T & \mathbf{K}_{xs}^T & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_u \\ \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

Soit $\mathbf{f}^{(\theta)}$ le chargement thermique, $\mathbf{f}^{(\gamma)}$ les charges permanentes, et $\mathbf{f}_u^{(\kappa)}$ un ensemble de forces de contrôle appliquées par les actionneurs ; par hypothèse $\mathbf{f}_x^{(\kappa)} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{f}_s^{(\kappa)} = \mathbf{0}$. Soit $\mathbf{u}^{(\theta)}$ la solution due au chargement thermique (les autres forces étant nulles), $\mathbf{u}^{(\gamma)}$ celle sous charge permanente, $\mathbf{u}^{(\kappa)}$ celle due au contrôle. Pour une notation compacte on écrira les combinaisons des chargements et les résultats relatifs, dans le cas linéaire, avec sommation des exposants :

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(\theta)} + \mathbf{f}^{(\gamma)} + \mathbf{f}^{(\kappa)} = \mathbf{f}^{(\theta+\gamma+\kappa)}; \quad (2.73)$$

lorsque le problème n'est pas linéaire, on utilisera cette notation seulement pour les incréments des déplacements et des forces.

Les forces de contrôle sont limitées pour des raisons technologiques, on fait l'hypothèse que toute liaison active admet la même limite \bar{f} en traction et compression :

$$-\bar{f} \leq f_{u_i} \leq \bar{f} \quad \forall i, \quad (2.74)$$

où a_i est le i -ème élément de la liste \mathbf{a} et $\mathbf{f}_u = \mathbf{f}_u^{(\theta+\gamma+\kappa)}$ (notons que la souplesse de l'actionneur implique que les deux premières contributions à la force totale qu'il exerce soient négligeables par rapport à la force de contrôle : $|f_{u_i}^{(\theta+\gamma)}| \ll |f_{u_i}^{(\kappa)}|$).

Les variations de température étant lentes, on considère que toute réaction de contrôle suffisamment rapide soit de toutes façon telle à ne pas générer des forces d'inertie. Les effets non linéaires sont supposés être indépendants du temps physique (par exemple ouverture/fermeture quasi-statique de fissures, endommagement induit par la déformation, etc.).

Contrôle linéaire optimal Dans un cas simple les degrés de liberté « x » et « u » coïncident :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{us} \\ \mathbf{K}_{us}^T & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}; \quad (2.75)$$

soit $\mathbf{H} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{us} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{us}^T$; si le problème est linéaire on obtient le système condensé :

$$\begin{cases} \mathbf{H} \mathbf{u}_u^{(\kappa)} = \mathbf{f}_u^{(\kappa)}, \\ \mathbf{u}_s^{(\kappa)} = -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{us}^T \mathbf{u}_u^{(\kappa)}. \end{cases} \quad (2.76)$$

Une stratégie directe consiste alors à imposer, si possible, de telles forces de contrôle que lesdits degrés de liberté « u » restent toujours dans la position due à la charge permanente, c'est à dire que $\mathbf{u}_u^{(\kappa)} + \mathbf{u}_u^{(\theta)} = 0$, tandis que la force de contrôle doit rester à sa valeur extrême si la valeur qu'il faudrait appliquer pour obtenir le résultat ci-dessus dépassait cette limite :

$$f_{u_i}^{(\kappa)} = \begin{cases} -H_{ij}u_{u_j}^{(\theta)} & \text{if } -\bar{f} \leq f_{u_i}^{(\gamma+\theta)} - H_{ij}u_{u_j}^{(\theta)} \leq \bar{f}, \\ \bar{f} & \text{if } f_{u_i}^{(\gamma+\theta)} - H_{ij}u_{u_j}^{(\theta)} \geq \bar{f}, \\ -\bar{f} & \text{if } -f_{u_i}^{(\gamma+\theta)} + H_{ij}u_{u_j}^{(\theta)} \geq \bar{f}. \end{cases} \quad (2.77)$$

Ce même algorithme demande peu de modifications si les degrés de liberté sur lesquels on agit par les actionneurs ne coïncident pas avec ceux que l'on veut contrôler; en outre on peut avoir un indice de performance, par exemple une fonction scalaire

$$\phi := (\mathbf{u}_x - \mathbf{w})^T \mathbf{W} (\mathbf{u}_x - \mathbf{w}) \quad (2.78)$$

à minimiser par le choix de $\mathbf{f}_u^{(\kappa)}$, \mathbf{w} et \mathbf{W} étant choisis en fonction des objectifs à poursuivre (par exemple, \mathbf{w} peut être une liste de déplacements généralisés que l'on veut imposer et \mathbf{W} une matrice diagonale avec des termes dominants en correspondance des degrés de liberté que l'on veut contrôler avec plus de rigueur).

Pour abréger la notation, soit

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Phi_{xu} \\ \Phi_{su} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}_{xs} \\ \mathbf{K}_{xs}^T & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ux}^T \\ \mathbf{K}_{us}^T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{K}_{uu} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ux} & \mathbf{K}_{us} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{xu} \\ \Phi_{su} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{S}_{xu} &= \Phi_{xu} \mathbf{C}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.79)$$

où \mathbf{S}_{xu} dénote la matrice de corrélation donnant un déplacement généralisé de type « x » pour une force généralisée unité de type « u ».

Il convient aussi de distinguer les solutions du contrôle qui sont strictement à l'intérieur du domaine admissible des forces de contrôle,

$$\mathbf{f}_u^{(\kappa)} : |f_{u_i}| < \bar{f} \quad \forall i, \quad (2.80)$$

de celles qui touchent la frontière

$$\mathbf{f}_u^{(\kappa)} : |f_{u_i}| = \bar{f} \quad \forall i. \quad (2.81)$$

De même pour \mathbf{S}_{xu} :

$$\mathbf{S}_{xu} \mathbf{f}_u^{(\kappa)} = \mathbf{S}_{xu} \mathbf{f}_u^{(\kappa)} + \mathbf{S}_{xu} \mathbf{f}_u^{(\kappa)}. \quad (2.82)$$

Le minimum sous contrainte qu'il faut calculer pour un contrôle à distance linéaire et optimal est

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{f}_u^{(\kappa)}} \left\{ \phi(\mathbf{u}_x^{(\theta+\gamma)}, \mathbf{f}_u^{(\kappa)}) \mid |f_{u_i}| \leq \bar{f} \quad \forall i \right\} \\ \phi(\mathbf{u}_x^{(\theta+\gamma)}, \mathbf{f}_u^{(\kappa)}) = (\mathbf{S}_{xu} \mathbf{f}_u^{(\kappa)} + \mathbf{u}_x^{(\theta+\gamma)} - \mathbf{w})^T \mathbf{W} (\mathbf{S}_{xu} \mathbf{f}_u^{(\kappa)} + \mathbf{u}_x^{(\theta+\gamma)} - \mathbf{w}). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Les conditions nécessaires qui en résultent sont remplies par les listes $(\mathbf{f}_u^{(\kappa)}, \mathbf{f}_u^{(\gamma)})$ vérifiant (2.80), (2.81), et

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{x\hat{u}}^T \mathbf{W} \mathbf{S}_{x\hat{u}} \mathbf{f}_u^{(\kappa)} = \mathbf{S}_{x\hat{u}}^T \mathbf{W} (\mathbf{w} - \mathbf{u}_x^{(\theta+\gamma)}) - \mathbf{S}_{x\hat{u}}^T \mathbf{W} \mathbf{S}_{x\hat{u}} \mathbf{f}_u^{(\kappa)} \\ \left[\mathbf{S}_{x\hat{u}}^T \mathbf{W} (\mathbf{w} - \mathbf{u}_x^{(\theta+\gamma)}) - \mathbf{S}_{x\hat{u}}^T \mathbf{W} (\mathbf{S}_{x\hat{u}} \mathbf{f}_u^{(\kappa)} + \mathbf{S}_{x\hat{u}} \mathbf{f}_u^{(\gamma)}) \right] \cdot \text{sgn}(\mathbf{f}_u) \geq 0, \end{cases} \quad (2.84)$$

où « sgn » dénote la signature du vecteur.

Le système (2.84) a été résolu pour tester la faisabilité du contrôle, en termes d'amplitude des forces nécessaires et des déplacements contrôlables ; la méthode est peu intéressante pour l'application parce qu'elle s'appuie sur la connaissance de $\mathbf{u}_x^{(\theta+\gamma)}$, qui peut difficilement se baser sur des mesures directes ou faire appel à des évaluations numériques suffisamment précises. Les solutions pour $\mathbf{w} = \mathbf{u}_x^{(\gamma)}$ et \mathbf{W} matrice identité ont été montrées dans [34].

Contrôle optimal instantané Une stratégie plus efficace pour les application peut prévoir un retour d'information par mesure directe de \mathbf{u}_x , indice de l'état actuel du système (algorithme de feedback). On considère ici une telle mesure faisable dans le cas en étude, par exemple par instruments optiques.

Dans le cas d'un contrôle optimal instantané, les changements de l'excitation extérieure interviennent toujours lorsque le système se trouve en condition optimale sous le chargement précédent. Par conséquent il suffit de calculer les changement des forces de contrôle qui répondent au mieux au dits changements de l'excitation ; une formulation incrémentale du problème est alors suffisante.

On définit l'objectif de la minimisation, en tout instant, de la valeur absolue des déplacements de type « x » (\mathbf{K} peut dépendre du processus) :

$$\begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{f} = 0, \\ \text{Min}_{\mathbf{f}_u^{(\kappa)}} \{ |u_{x_i}| \mid |f_{u_i}| \leq \bar{f} \forall i \} \end{cases} \quad (2.85)$$

(plus conditions au bord). Soit $\tilde{\mathbf{K}}$ la matrice de raideur tangente ; les définitions de \mathbf{C} , $\tilde{\Phi}$, \mathbf{S}_{xu} sont considérées maintenant, avec $\tilde{\mathbf{K}}$ à la place de \mathbf{K} , pour définir les matrices tangentes $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\mathbf{S}}_{xu}$.

Pour un déplacement actuel \mathbf{u} , si le chargement thermique varie de $\Delta \mathbf{f}^{(\theta)}$, la réponse du système de contrôle $\Delta \mathbf{f}_u^{(\kappa)}$ sera solution de :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{v}^{(\theta)} + \Delta \mathbf{f}^{(\theta)} = 0, \\ \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{v}^{(\kappa)} + \Delta \mathbf{f}^{(\kappa)} = 0, \\ \text{Min}_{\Delta \mathbf{f}_u^{(\kappa)}} \{ |u_{x_i} + v_{x_i}^{(\theta)} + v_{x_i}^{(\kappa)}| \mid |f_{u_i}| \leq \bar{f} \forall i \}. \end{cases} \quad (2.86)$$

L'incrément du déplacement dû à ces forces de contrôle est la solution du système

condensé :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{v}_u^{(\kappa)} + \Delta\mathbf{f}_u^{(\kappa)} = 0, \\ \mathbf{v}_x^{(\kappa)} = -\tilde{\Phi}_{xu}\mathbf{v}_u^{(\kappa)}, \\ \mathbf{v}_s^{(\kappa)} = -\tilde{\Phi}_{su}\mathbf{v}_u^{(\kappa)}. \end{cases} \quad (2.87)$$

Formellement le problème du contrôle est réduit à la recherche d'une solution de :

$$\text{Min}_{\Delta\mathbf{f}_u^{(\kappa)}} \left\{ |\mathbf{u}_x + \mathbf{v}_x^{(\theta)} + \tilde{\mathbf{S}}_{xu}\Delta\mathbf{f}_u^{(\kappa)}| \quad | f_{u_i} | \leq \bar{f} \quad \forall i \right\}, \quad (2.88)$$

où $\mathbf{v}^{(\theta)}$ est la solution de

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{v}^{(\theta)} + \Delta\mathbf{f}^{(\theta)} = 0. \quad (2.89)$$

En pratique la matrice $\tilde{\mathbf{S}}_{xu}$ et la liste $\mathbf{u}_x + \mathbf{v}_x^{(\theta)}$ peuvent être obtenues par mesure directe. $\tilde{\mathbf{S}}_{xu}$, matrice tangente de corrélation (de souplesse), donne les déplacements généralisés de type « x » correspondant à des forces unitées de type « u »; on peut programmer des échantillonnages sur la structure (par exemple en utilisant les actionneur pour appliquer les forces tests) lorsque des variations significatives des déplacements mesurés suggèrent le besoin d'une nouvelle évaluation de la matrice tangente de corrélation.

La stratégie de contrôle ci-dessus a été programmée, suivant deux algorithmes :

- contrôle à boucle fermée (mesure du déplacement actuel),
- contrôle à boucle ouverte (évaluation numérique du déplacement actuel).

Dans les deux cas il a été nécessaire de simuler la structure par le modèle décrit au §2.5.2. Une description détaillée des deux algorithmes est donnée dans [13].

Résultats et conclusions

Les résultats obtenus par le contrôle direct présenté dans §2.5.2 montrent que l'on peut obtenir une réduction très importante du déplacement vertical des points contrôlés, tout en appliquant des forces de contrôle relativement modérées, en dessous de 45 kN (cf. [34]). Ce résultat nous a poussé vers la recherche de stratégies de contrôle plus réalistes, telles que celle présentée au §2.5.2.

En particulier on a tenu compte de deux objectifs possibles qui peuvent être poursuivis en appliquant la stratégie §2.5.2, en fonction du choix des points « x » :

- 10 points à l'extrados de la voûte sur lesquels les actionneurs agissent directement (les degrés de liberté « u » et « x » coïncident; cible 1),
- 10 points dans l'intrados, choisis parmi ceux où la déformation irréversible est plus grande (cible 2).

En visant la cible 1, les résultats numériques du contrôle en boucle fermée et ouverte sont essentiellement équivalents dans la condition hivernale extrême, alors qu'une faible différence apparaît dans la condition estivale extrême. En considérant une variation continue (sinusoïdale) entre ces deux conditions, on a aussi montré la fiabilité de l'algorithme avec boucle fermée (cf. [32]).

Finale­ment, pour vérifier les effets collatéraux du contrôle (par exemple une éventuelle augmentation sensible des contraintes), on a poursuivie une analyse numérique complète de la structure sous chargement thermique et contrôle optimal (cible 2, algorithme à boucle fermée; cf. [13]).

Les résultats montrent l'efficacité et la faisabilité du contrôle proposé; ils sont donnés, dans l'ordre, pour les conditions extrêmes d'été et d'hiver :

- déformée de la structure (maillée) comparée avec son profil non déformé dans le cas non contrôlé et contrôlé (figure 2.9, 2.10);
- déplacements verticaux des nœuds de la maille dans l'intrados de la voûte dans les deux cas (figure 2.11);
- contraintes principales dans les nœuds dans l'intrados de la voûte dans les deux cas (figure 2.12, 2.13).

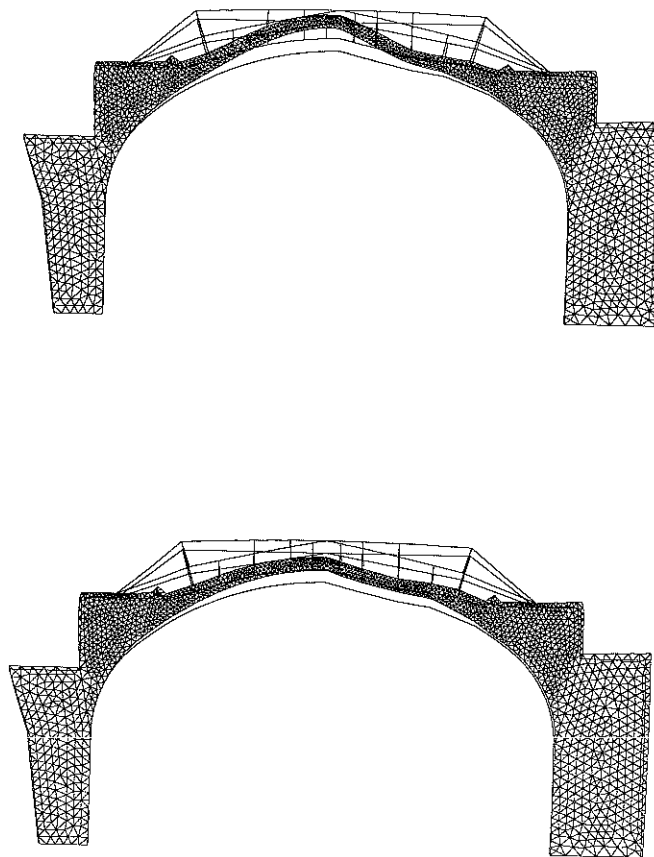


FIG. 2.9 – Déformée non contrôlée (en haut) et contrôlée (en bas) de la voûte en condition extrême estivale (la ligne de contour représente la structure non déformée ; le facteur d'amplification des déplacements est 150).

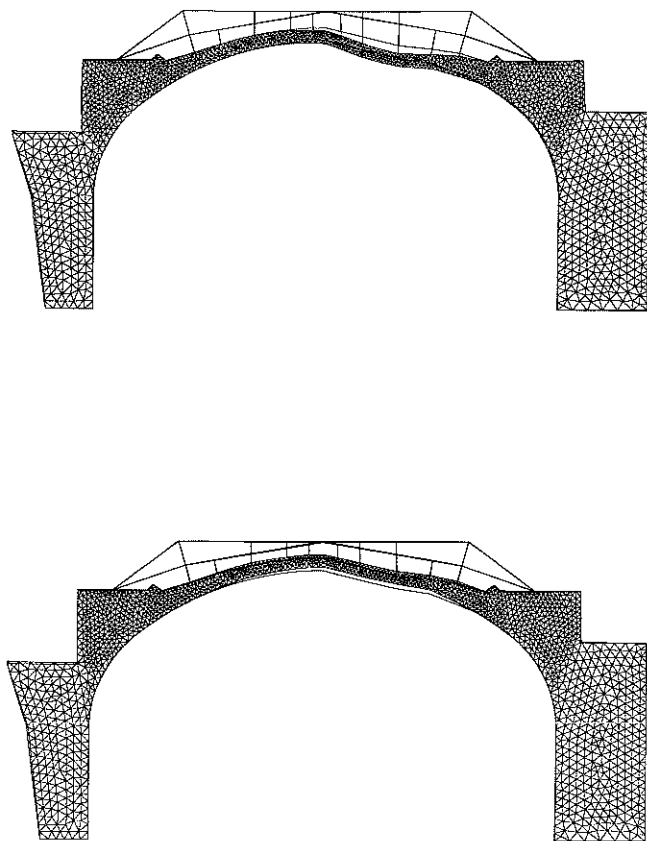


FIG. 2.10 – Déformée non contrôlée (en haut) et contrôlée (en bas) de la voûte en condition extrême hivernale (la ligne de contour représente la structure non déformée ; le facteur d'amplification des déplacements est 150).

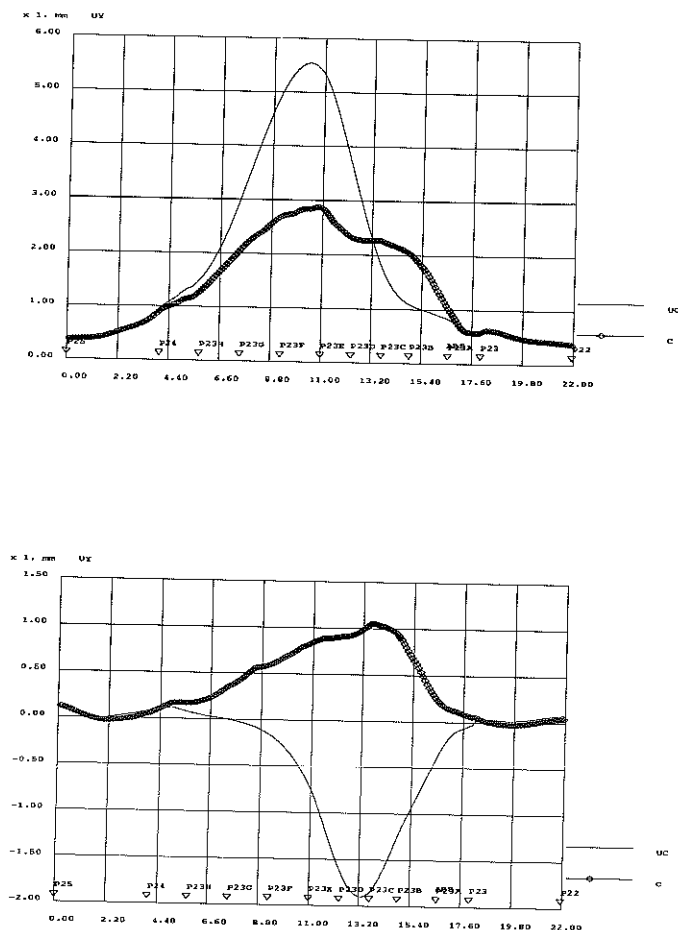


FIG. 2.11 – Comparaison des déplacements de l'intrados de la voûte en condition extrême en été (en haut) et en hiver (en bas) avec ou sans contrôle (nœuds de la maille en abscisses, les déplacements contrôlés sont indiqués avec marques en losange).

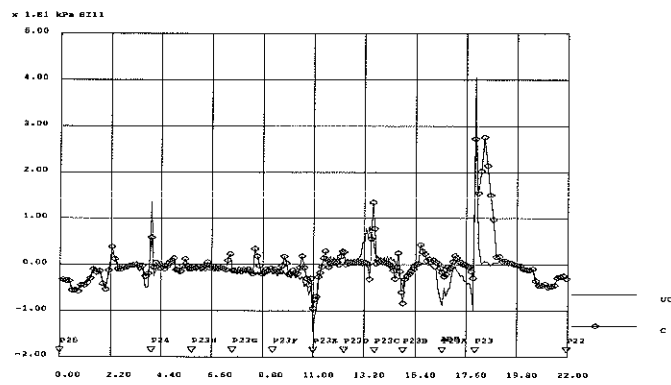
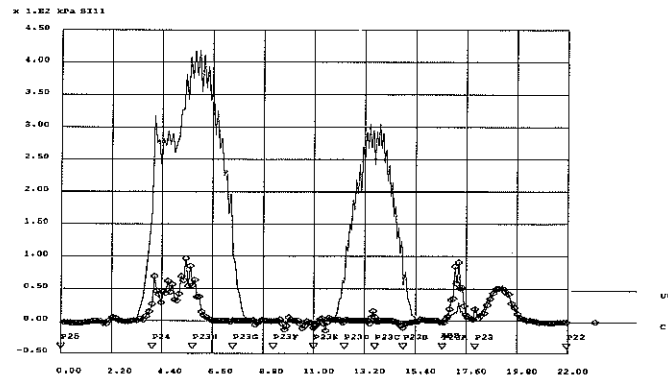


FIG. 2.12 – Comparaison des contraintes principales maximales dans l'intrados de la voûte en condition extrême estivale (en haut) et hivernale (en bas), sans contrôle (ligne continue normale) et avec contrôle (ligne avec marques en losange).

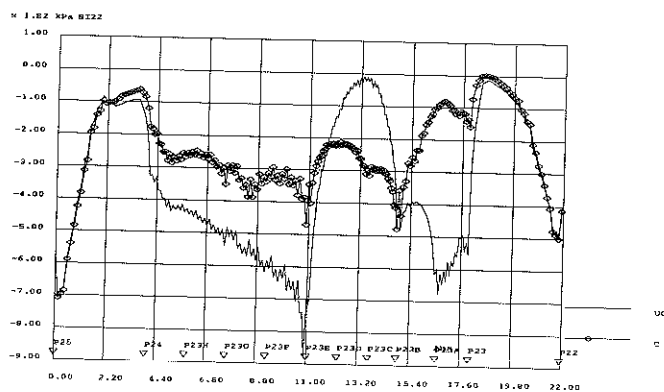
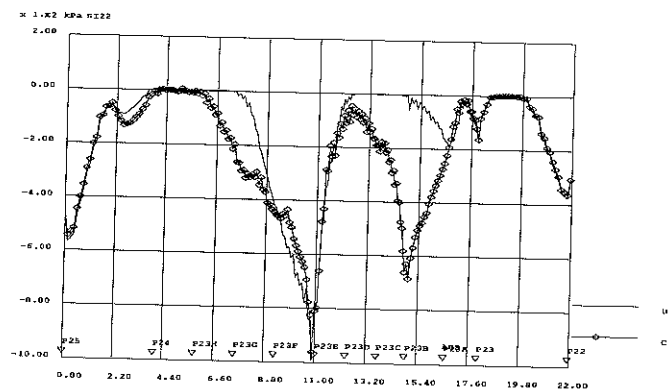


FIG. 2.13 – Comme en figure 2.12, mais pour la contrainte minimale.

Chapitre 3

Contributions à l'analyse de quelques questions historiques dans la mécanique des milieux continus

3.1 Introduction

L'étude de l'histoire des sciences est fondamentale pour la compréhension des problèmes actuels; beaucoup de questions qui se posent dans la modélisation des nouveaux matériaux et processus ont été posées au début du XIX^e siècle. En particulier citons la modélisation continue de systèmes discrets (voir les travaux de Navier, Poisson et Cauchy dans les années 1820) et les efforts faits pour l'établissement de lois de comportement non locales (ou au moins, non simples) pour la modélisation de l'écoulement des cours d'eau (voir les travaux de Kleitz, Levy, Saint-Venant).

La mécanique des milieux continus naît au début du XIX^e siècle grâce surtout à l'œuvre de Navier, Poisson, Cauchy, en France, et de Green et Stokes en Grande Bretagne. Les mécaniciens (ou géomètres, comme ils aimaient s'appeler) français s'inspiraient d'une vision du monde basée sur l'idée d'action à faible distance et de « *molécule* »⁽¹⁾. Cette vision représente le meilleur compromis entre deux cosmologies apparemment opposées et également supportées par le

¹Dans la suite du texte on emploie de préférence le mot « *particule* », car celui-ci garde aujourd'hui une signification suffisamment générale qui se raccorde bien à la vision de l'état de la matière propre des mécaniciens post-illuministes. Il s'agit d'une portion de matière de taille « *imperceptible* », mais qui n'est pas forcément indivisible, et qui interagit à très faible distance avec d'autres pareils éléments de matière.

monde scientifique du XVIII^e siècle : la philosophie cartésienne et le système newtonien de l'univers.

Les racines culturelles des mécaniciens français du début du XIX^e sont donc essentiellement philosophiques, l'expérience physique sur les matériaux réels étant très réduite à l'époque. De cette vision abstraite naît une branche de la physique mathématique, la mécanique des milieux continus, qui prétend ensuite donner – et donne effectivement – des réponses efficaces dans des conditions pratiques les plus diverses, de la construction des ponts à l'écoulement des cours d'eau.

La grande généralité des résultats de Cauchy, Poisson, Navier – due justement à leur origine philosophique abstraite – permet encore aujourd'hui leur application dans la majorité des cas traités par l'ingénieur des matériaux et des structures. Néanmoins des limites commencent à paraître évidentes : la prise en compte de la physique des matériaux est toujours quelque peu limitée à des propriétés standard. Les matériaux poreux ou cristallisés ou avec microstructure d'autre nature demandent la prise en compte d'effets qui ne sont pas traitables par un simple modèle de milieu continu – dit aujourd'hui à la Cauchy –. Les auteurs connaissent ces limites : Poisson d'abord et Cauchy ensuite se posèrent le problème de représenter les équations du mouvement des corps cristallisés. La nature empirique des hypothèses nécessaires pour obtenir un modèle à la Cauchy était et demeure évidente à la lecture de leurs œuvres.

La pratique de l'ingénieur qui suit les travaux cités a en partie oublié ses racines empiriques et a donné un caractère universel aux équations d'équilibre (ou de conservation de la quantité de mouvement) écrites par Cauchy pour les milieux continus. Il est très important de lire les travaux des géomètres français du XIX^e siècle pour comprendre leurs hypothèses et, par conséquent, les limites de leurs modèles. En plus cette lecture devient source d'inspiration pour l'écriture de modèles mathématiques des matériaux qui ne se prêtent pas aux dites hypothèses.

Dans la première section de ce chapitre on analyse le panorama scientifique et philosophique des géomètres français du XIX^e siècle, notamment vis-à-vis du problème central de la vision moléculaire et continue de la matière (§3.2).

Dans la deuxième section, on étudie les approches de Cauchy, Saint-Venant et Poincaré du problème du passage d'un modèle discret de la matière à celui du milieu continu pour les solides élastiques. Le résultat connu sous le nom de « *relations de Cauchy* » est à la base de la querelle sur le nombre des constantes d'élasticité qui caractérisa le débat scientifique à la fin du XIX^e siècle, avec des interventions remarquables au cours de la première moitié du XX^e. Il s'avère que les démonstrations de ces auteurs ne sont pas complètes et que, par ailleurs, en partant de leurs hypothèses, on peut démontrer que les relations de Cauchy n'ont pas une valeur générale. Ce résultat renouvelle l'intérêt de l'approche « *moléculaire* » qui n'est d'ailleurs pas limité à la théorie de l'élasticité (§3.3).

Dans la troisième section du chapitre on présente une étude bibliographique sur les premiers modèles de comportement non locaux. Cette étude suggère que le ralentissement dans la proposition d'autres théories de ce genre fut la conséquence

d'une adversité culturelle d'origine tant philosophique que et pragmatique (§3.4).

3.2 Molécules et milieu continu

« *Corpus voco rem omnem quae moveri et tangi potest et qua tangentibus resistitur* ». « *Vacuum voco spatium omne per quod corpus sine resistentia movetur* » (cf. [65]).

Newton retient le dualisme entre « *corpora* » et « *inane* », contre la « *Loi de Continuité* » des philosophes cartésiens et leibniziens et de l'Église Catholique.

« *All these things being considered, it seems probable to me, that God in the beginning formed Matter in solid, massy, hard, impenetrable, movable particles, of such sizes and figures, and with such other properties, and in such proportion to space, as most conduced to the end for which he formed them; and that these primitive particles, being solids, are incomparably harder than any porous bodies compounded of them; even so very hard, as never to wear or break in pieces; no ordinary power being able to divide what God himself made one in the first creation* » (cf. [72]).

Les particules constituant la matière sont, pour Newton comme pour ces prédécesseurs atomistes, des petits corps solides indivisibles, ayant des formes bien définies et occupant donc des régions petites, mais finies, de l'espace.

« *It seems to me farther, that those particles have not only a force of inertia accompanied with such passive laws of motion as naturally result from that force, but also that they are moved by certain active principles, such as is that of gravity, and that which causes fermentation, and the cohesion of bodies. These principles I consider, not as occult qualities, supposed to result from the specific forms of things, but as general laws of nature, by which the things themselves are formed; their truth appearing to us by phenomena, though their causes be not yet discovered* » (Ibid.).

« *I use the word Attraction in general, to denote the force with which the bodies tend one towards the other, whatever the cause of this force may be* » (Ibid. cf. [4] vol. I p. 218).

Entre 1745 et 1758, Boscovich présenta sa philosophie naturelle, concevant la matière comme un ensemble de « points parfaitement indivisibles et inextensibles [...] dispersés dans un immense vide » et muni d'une loi de force mutuelle et d'une force d'inertie (cf. [91, 4]). « L'espace entier n'est qu'un vide continu », dans lequel règne une loi de force (*lege virium*) complètement identifiés avec la matière.

Donc Boscovich refuse en même temps Newton et Descartes : si les forces mutuelles croissent infiniment lorsque la distance entre particules décroît vers zéro, alors la taille des ces particules doit être nulle, car – autrement – une force infinie séparerait leurs parties ; toujours grâce à cette force les chocs ne sont pas possibles, ne pouvant y avoir que des changements continus des vitesses relatives des particules. Donc « *Natura non facit saltus* » ni de la matière au vide, ni dans le mouvement. Le dualisme entre matière et force et entre corps et vide est simplement nié.

Bien que son « système » soit d'esprit Scolastique, lointain de la sensibilité scientifique de son siècle (cf. [102, 4]), Boscovich a le mérite d'avoir avancé des pas décisifs pour combler la distance entre deux cosmologies opposées. Pour ses successeurs il ne sera pas contradictoire de parler au même temps d'atomes, de continuité, de forces à distance, d'espace et de vide (cf. *Historique abrégée des recherches sur la résistance et sur l'élasticité des corps solides* dans [70] p. cxliij).

Les particules imaginées par les géomètres français du début du XIX^e siècle s'apparentent à celles de Boscovich, sauf que (suivant le principe de d'Alembert) elles sont munies d'une masse plutôt que d'une force d'inertie et que la force à distance qu'elles exercent est définie d'une façon bien plus claire que par les six cas proposés par Boscovich (cf. [4] vol. I p. 226). Cette force est due à la somme de l'attraction de la gravité de Newton et d'une répulsion due au « calorique ». Le rapport entre attractions et répulsions donne lieu aux états d'équilibre ou aux changements de phase. En cas de mouvement d'autres forces apparaissent, expliquant la résistance des corps.

Poisson, qui en 1828 proclama l'intérêt dans l'établissement d'une « mécanique physique » analogue à la « mécanique analytique » de Lagrange (cf. [85]), écrit quand la tâche lui semblait presque accomplie :

« Tous les corps sont formés de *molécules* disjointes, c'est-à-dire, de parties de matière pondérable, de grandeur insensible, séparées les unes des autres par des pores ou espaces vides, dont les dimensions sont aussi imperceptibles à nos sens » (cf. [86, 87]).

Navier, avec une vision plus pragmatique, déclara [70] :

« Les corps paraissent être composés de parties ou molécules, maintenues à certaines distances les unes des autres par des forces opposées qui se font mutuellement équilibre ».

Cauchy et de Saint-Venant (cf. [70] Appendix III et V) partageaient ce point de vue : la continuité de la matière était un artifice ou un résultat limite mathématique, tandis que les particules étaient considérées parmi les « circonstances physiques qui tiennent à la nature intime des corps » (cf. [85] p. 363).

Dans la seconde moitié du siècle Maxwell se servira du même passage dans l'établissement de la théorie cinétique des gaz (cf. [102, 104]). Dans un gaz, la matière étant très raréfiée, l'idée d'étudier des actions échangées à très courte distance perd son efficacité ; les particules se déplacent la plus part du temps dans le vide suivant leur chemin libre – sans interaction sensible avec des voisins – et leurs chocs (variations très rapides, mais continues, des vitesses de deux particules qui se rencontrent) deviennent les phénomènes tenant à l'état du système. Pourtant la théorie de Maxwell demeure continue :

« *The kinetic gas, though Maxwell's genius framed it upon an astute combination of molecular and statistical ideas, is a continuous medium. The theory of the kinetic gas is a field theory, a theory in which each physical quantity is represented by a smooth function of time t and place \mathbf{x}* » (cf. [104]).

« *Clearly the molecular scheme employed, however plausible it may seem, is not consistent with the principles of Newtonian mechanics. If the intermolecular forces extend to infinity, then no encounter can be binary, and the motion of any two molecules are influenced, though possibly indeed not much, by the motions of all the rest* » (cf. [104]).

C'est aussi le « *possibly indeed not much* », noté par Truesdell dans ses considérations sur la théorie cinétique, qui permet aux géomètres français du XIX^e siècle de négliger les conséquences des problèmes multi-corps en écrivant les conditions d'équilibre entre point-masses newtoniens. C'est la possibilité de regarder les masses comme uniformément réparties dans l'espace, pourvu qu'on considère un ensemble suffisamment nombreux de particules, qui permet de décrire par des flux surfaciques (c'est à dire par des fonctions absolument continues sur les surfaces) des systèmes de forces à distance. La démarche fut celle de l'ingénieur, non du mathématicien : le modèle continu était tout simplement la meilleure façon de décrire la matière, bien que artificielle; nos auteurs choisissaient de se placer dans les hypothèses les plus fortes leur permettant ce passage, sans revenir ensuite sur leurs pas pour contrôler si d'autres chemins s'ouvraient dans des conditions intermédiaires.

C'est par conséquence de cet état d'esprit que l'acceptation ou le rejet de certains de leurs arguments demeurent du domaine du sentiment physique plus que de la preuve mathématique. L'objection de Poincaré à l'hypothèse que lui même attribua à de Saint-Venant, sur l'existence d'un potentiel *somme* de potentiels dipolaires, donne un exemple bien connu de cette conséquence (cf. [84]).

Le débat sur les modèles du fluide et l'effort de de Saint-Venant pour effacer toute trace de non-localité est aussi centré sur cette ambiguïté. Une ambiguïté que le rasoir d'Occam fit pénétrer dans le corps de la science :

« *Neque enim necesse est eas hypothèses esse veras; imo ne verisimilis quidem; sed sufficit hoc unum, si calculum observationibus congruentem exhibeant* » (Copernic).

3.3 Les relations de Cauchy

3.3.1 Introduction

Les « *géomètres* » français – Navier, Cauchy, Poisson et, plus tard, Lamé, Clapeyron et Saint-Venant – bâtissaient à partir des années 20 du XIX^e siècle une théorie « *moléculaire* » de l'élasticité qui dut aussitôt se confronter à des

contradictions expérimentales ⁽²⁾. Le nombre des constantes d'élasticité qu'ils prévoient, en étudiant un système de particules en hypothèse de petites perturbations d'un état d'équilibre sans contrainte, est 15 dans le cas général, qui se réduit à 1 pour un matériau isotrope, tandis que 21 et 2 sont les nombres retenus par les « *continuistes* », suivant l'œuvre de Green, et confirmés par l'expérience.

Cette contradiction affaiblit la valeur des résultats des mécaniciens français. Dans leurs travaux les particules étaient supposées échanger des actions dipolaires dirigées suivant le rayon joignant leur centre ; cette hypothèse, qui était apparemment la seule de nature non géométrique, fut donc remise en cause. En fin de siècle finalement s'affirma l'idée qu'il n'existe pas de particules n'échangeant que des actions centrales ou simplement dipolaires : l'image de la matière décomposée en parties élémentaires simples et simplement connectées en fut détruite.

Les travaux de Poincaré [84] et Voigt [109] résument bien l'établissement de cette idée ainsi que la théorie des frères Cosserat [22] en montre l'affirmation générale dans le milieu scientifique. L'approfondissement des connaissances sur la structure des solides qui caractérise le XX^e siècle, avec la naissance de la dynamique des réseaux cristallins, changea finalement l'objet de la discussion scientifique, en bornant, de fait, la mécanique des milieux continus aux applications macroscopiques.

Bien que son intérêt pratique ne dure donc pas plus de cent ans, la querelle sur les « *relations de Cauchy* ⁽³⁾ » se prolonge jusqu'à nos jours comme un problème non résolu. Elle reste par exemple d'actualité dans les problèmes d'homogénéisation, lorsqu'on se donne, à petite échelle, des représentations discrètes des corps.

On propose une lecture des œuvres dans lesquelles ce débat a pris son origine, notamment celles de Cauchy et Saint-Venant, mais aussi celle de Poincaré car il introduit une démarche variationnelle. La démonstration de Cauchy de 1828 se base sur l'application d'un champ de petits déplacements engendré par une déformation uniforme : la configuration du système de particules ainsi obtenue n'est pas forcément en équilibre, mais ceci est négligé par l'auteur qui obtient donc une détermination approchée de la raideur globale du système. Lorsque Saint-Venant reprend le sujet (en publiant en 1864 les leçons de Navier à l'École Nationale des Ponts et Chaussées) il considère fiable cette approximation sauf pour le cas exceptionnel du cristal parfait (mis en évidence par Cauchy lui-même en 1851, et par Lamé en 1852, à partir des idées de Poisson de 1829). Finalement, en 1892, Poincaré introduit l'idée de développer l'expression du potentiel total du système de particules autour d'un état d'équilibre, mais, outre le fait qu'il négligea l'hétérogénéité de la déformation microscopique, il traita les distances inter-particules comme des variables indépendantes en prenant ainsi une configuration déformée qui n'est ni compatible ni équilibrée. Les imprécisions citées conduisent à une déduction généralement fautive, qui engendre les relations de Cauchy.

En reprenant les hypothèses physiques des auteurs cités, mais en développant

²Dans cette section du chapitre on resume les publications figurantes dans la liste donnée à p. xiii et suiv. avec les numéros [14, 15, 21]

³Il s'agit des relations de symétrie du tenseur de raideur élastique $C_{ijkl} = C_{ihjk}$.

leurs raisonnements sans lesdites incorrections, on obtient 21 coefficients d'élasticité dans le cas général, qui se réduisent à 2 pour le cas de l'isotropie.

Dans la suite, on montre d'abord comment on établit l'équivalence entre un système discret de particules et un milieu continu ; ensuite on discute sur les démarches proposées à cette fin par Cauchy, Saint-Venant et Poincaré. Finalement on propose une formulation du problème qui n'implique pas les relations de Cauchy. Par souci de généralité, en établissant nos résultats, on considère un système de particules ayant une orientation propre physiquement significative, qui n'a pas été considérée par les auteurs cités ; les résultats sans orientation peuvent être obtenus ensuite sans complication.

Le passage du discret au continu envisagé par les mécaniciens français du XIX^e siècle, apparemment dépourvu d'intérêt à cause de l'évidente contradiction expérimentale des relations de Cauchy, se trouve donc confirmé dans sa valeur théorique et appliquée.

3.3.2 Le système moléculaire de Cauchy

En 1828 Cauchy écrit les équations d'équilibre élastique d'un système de particules (*cf.* [18]). De même que Navier, Poisson et Lamé, il appuya ses déductions sur le concept de fonction intensité des actions dipolaires plutôt que sur celui de potentiel dipolaire dû, plus tard, à Saint-Venant et développé en toute sa généralité par Poincaré à la fin du siècle.

Suivant Cauchy, on considère un corps matériel constitué de N particules et on étudie le voisinage de la particule φ , contenant $N_\varphi < N$ particules, notées par $\kappa \in \{1, \dots, N_\varphi\}$ (on dénote par des indices latins les composantes cartésiennes des vecteurs ; les indices grecs serviraient pour dénombrer un ensemble de particules) ; soient γ_κ leurs masses, γ_φ la masse de la particule φ .

L'auteur décrit la configuration initiale du voisinage de φ par l'ensemble des distances mesurées à partir de φ , $\rho_{\kappa\varphi}$, et par l'ensemble des vecteurs unitaires $\mathbf{n}_{\kappa\varphi}$ sortant de φ ($3(N_\varphi + 1)$ coordonnées indépendantes). Soit $\rho'_{\kappa\varphi}$ et $\mathbf{n}'_{\kappa\varphi}$ les distances et les vecteurs unitaires après déformation ; Cauchy suppose qu'ils ont été obtenus par une élongation pure *uniforme* sur l'ensemble des particules du voisinage de φ , $\mathbf{U} = \mathbf{I} + \mathbf{E} \in \text{Sym}$ (\mathbf{I} tenseur identité) :

$$\begin{aligned} \rho'_{\kappa\varphi} &= \rho_{\kappa\varphi} \eta_{\kappa\varphi}(\mathbf{E}) \\ \mathbf{n}'_{\kappa\varphi} &= \frac{1}{\eta_{\kappa\varphi}(\mathbf{E})} (\mathbf{I} + \mathbf{E}) \mathbf{n}_{\kappa\varphi} \\ \eta_{\kappa\varphi}(\mathbf{E}) &:= \sqrt{1 + \mathbf{n}_{\kappa\varphi} \cdot (2\mathbf{E} + \mathbf{E}\mathbf{E}) \mathbf{n}_{\kappa\varphi}} . \end{aligned} \quad (3.1)$$

L'hypothèse d'élongation uniforme permet à l'auteur le passage des équations (22) et (23) aux équations de (25) à (30) dans [18], p. 220-222. Elle définit la localisation cinématique par une approche dite – de nos jours – « à la Voigt » au problème de l'homogénéisation. Il s'agit d'une approximation sur laquelle l'auteur reviendra en 1851, après avoir analysé ses conséquences sur la détermination

du nombre des constantes d'élasticité et avoir partiellement accueilli certaines remarques de Poisson fortement contesté jadis.

D'après Cauchy la particule centrale du voisinage, φ , est soumise à une force qui résulte de la somme d'actions dipôlaires. Chaque dipôle échange une force dirigée suivant la direction joignant le centre des deux particules, avec une intensité donnée par une fonction θ de la distance entre ces centres et proportionnelle aux masses du dipôle. La fonction intensité de l'action dipolaire θ est supposée tendre rapidement vers zéro en s'éloignant de l'origine, de sorte que l'action sur φ des particules placées en dehors du voisinage N_φ soit négligeable.

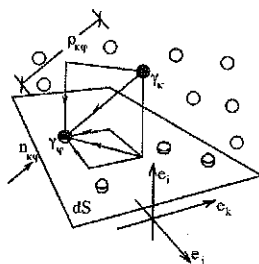


FIG. 3.1 – Schéma moléculaire de Cauchy.

En configuration de référence la force sur φ est :

$$\mathbf{f}_{\varphi 0} = \gamma_\varphi \sum_{\kappa=1}^{N_\varphi} \gamma_\kappa \mathbf{n}_{\kappa\varphi} \theta(\rho_{\kappa\varphi}),$$

et, après déformation *uniforme* \mathbf{E} :

$$\mathbf{f}_\varphi(\mathbf{E}) = \gamma_\varphi (\mathbf{I} + \mathbf{E}) \sum_{\kappa=1}^{N_\varphi} \gamma_\kappa \mathbf{n}_{\kappa\varphi} \frac{\theta(\rho_{\kappa\varphi} \eta_{\kappa\varphi}(\mathbf{E}))}{\eta_{\kappa\varphi}(\mathbf{E})}. \quad (3.2)$$

Il faut noter que la configuration obtenue après déformation uniforme est en équilibre si et seulement si des forces extérieures $\mathbf{b}_\varphi = -\mathbf{f}_\varphi(\mathbf{E})$ agissent sur les particules.

La résultante des actions de ce type qui traversent une surface $dS(\mathbf{n})$ de normale \mathbf{n} et superficie dS est le vecteur contrainte sur la surface, c'est à dire, par définition, le résultat de l'application du tenseur de contrainte \mathbf{T}_0 à la normale \mathbf{n} $dS(\mathbf{n})$.

Cauchy produit l'argument du « *cylindre* » afin de calculer le vecteur contrainte à partir de la formule (3.2) : toute surface matérielle $dS(\mathbf{n})$ est traversée par autant d'actions dipôlaires suivant une même direction $\mathbf{n}_{\kappa\varphi}$ et ayant la même intensité $\theta(\rho_{\kappa\varphi})$ qu'il y a de particules contenues dans un cylindre de base dS et hauteur $\rho_{\kappa\varphi} |\mathbf{n}_{\kappa\varphi} \cdot \mathbf{n}|$.

Ce passage est crucial, car il établit l'équivalence entre un système de point-masses décrit par la mécanique newtonienne (c'est à dire par des interactions à distance, n'admettant donc pas le concept de flux au travers d'une surface) à un

système continu dans lequel l'interaction entre parties se fait par leur surfaces de contact. L'idée fondamentale dans le passage est l'identification de la masse d'un certain nombre de particules avec la masse totale d'un petit élément de volume sur lequel on assigne par conséquent une densité uniforme. Cette idée permet l'homogénéisation du modèle moléculaire : en réduisant la taille des éléments de volume leur masse totale se réduit proportionnellement et il en est donc ainsi de l'intensité totale de l'action qu'ils échangent avec d'autres parties du corps.

L'argument du cylindre donne le résultat (pas de sommation sur indices φ dans les formules suivantes) :

$$\mathbf{T}_0 = \frac{1}{2}\rho \sum_{\kappa=1}^{N_\varphi} \gamma_\kappa \mathbf{n}_{\kappa\varphi} \otimes \mathbf{n}_{\kappa\varphi} \rho_{\kappa\varphi} \theta(\rho_{\kappa\varphi}), \quad (3.3)$$

où ρ est la masse volumique de l'ensemble des particules (la somme des masses γ_φ , $\varphi \in \{1, \dots, N\}$ sur le volume occupé par l'ensemble) et le facteur $1/2$ est dû à ce que avec $\kappa \in \{1, \dots, N_\varphi\}$ on compte toutes les particules d'un voisinage sphérique de φ (très petit par rapport aux dimensions de dS) et donc deux fois les particules que l'on doit effectivement compter.

Le même raisonnement fut repris par Love [61], de sorte que la formule (3.3) est souvent liée à son nom (bien que lui-même l'attribua à Cauchy).

En imposant une élongation uniforme, on obtient de (3.3) l'expression du tenseur de contrainte en fonction de la déformation :

$$\mathbf{T}(E) = \frac{1}{2}\rho(1 - \text{tr}\mathbf{E}) \sum_{\kappa=1}^{N_\varphi} \gamma_\kappa (\mathbf{I} + \mathbf{E}) \mathbf{n}_{\kappa\varphi} \otimes (\mathbf{I} + \mathbf{E}) \mathbf{n}_{\kappa\varphi} \rho_{\kappa\varphi} \frac{\theta(\rho_{\kappa\varphi} \eta_{\kappa\varphi}(\mathbf{E}))}{\eta_{\kappa\varphi}(\mathbf{E})}, \quad (3.4)$$

que l'on peut développer au voisinage de $\mathbf{E} = \mathbf{0}$; le terme indépendant de \mathbf{E} est la contrainte dans la configuration de référence de l'équation (3.3), le coefficient du terme linéaire en \mathbf{E} est une estimation du tenseur de comportement élastique :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{E}) &= (1 + \text{tr}\mathbf{E})\mathbf{T}_0 + \rho \sum_{\kappa=1}^{N_\varphi} \gamma_\kappa \text{sym}(\mathbf{n}_{\kappa\varphi} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_{\kappa\varphi}) \rho_{\kappa\varphi} \theta(\rho_{\kappa\varphi}) \mathbf{E} + \\ &\frac{1}{2}\rho \sum_{\kappa=1}^{N_\varphi} \gamma_\kappa \mathbf{n}_{\kappa\varphi} \otimes \mathbf{n}_{\kappa\varphi} \otimes \mathbf{n}_{\kappa\varphi} \otimes \mathbf{n}_{\kappa\varphi} \rho_{\kappa\varphi} [\rho_{\kappa\varphi} \theta'(\rho_{\kappa\varphi}) - \theta(\rho_{\kappa\varphi})] \mathbf{E} + o(\mathbf{E}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

(θ' est la dérivée première de θ). La première sommation et le terme en $\text{tr}\mathbf{E}$ disparaissent si $\mathbf{T}_0 = \mathbf{0}$: la configuration initiale est à contrainte nulle, c'est alors la configuration naturelle. Le tenseur d'élasticité ainsi obtenu :

$$\mathbb{C} = \frac{1}{2}\rho \sum_{\kappa=1}^{N_\varphi} \gamma_\kappa \mathbf{n}_{\kappa\varphi} \otimes \mathbf{n}_{\kappa\varphi} \otimes \mathbf{n}_{\kappa\varphi} \otimes \mathbf{n}_{\kappa\varphi} \rho_{\kappa\varphi} [\rho_{\kappa\varphi} \theta'(\rho_{\kappa\varphi}) - \theta(\rho_{\kappa\varphi})]. \quad (3.6)$$

est invariant pour tout échange d'indices :

$$C_{ijkh} = C_{ikjh} \quad (3.7)$$

car il en est ainsi pour tout terme dans sommation au second membre de l'équation (3.6).

En résumé, les hypothèses physiques à la base de (3.7) sont celles d'interaction dipolaire à faible distance et d'absence de contrainte en configuration initiale; l'évaluation du tenseur de raideur élastique pour lequel le résultat (3.7) peut être établi fait appel à une hypothèse de déformation uniforme pour l'ensemble des dipôles.

3.3.3 La présentation du sujet faite par de Saint-Venant

Dans l'Appendice III de [70] de Saint-Venant reprend la démonstration de Cauchy mais en termes simplifiés, pour en faciliter l'exposé (*cf.* les théorèmes 1 et 2 dans le texte cité).

Dans l'Appendice V de ce même ouvrage il traite de la querelle sur le nombre des constantes d'élasticité. Dans l'Appendice complémentaire il reprend le concept de potentiel dipolaire en rappelant les travaux de Navier, Green et Gauss. Il considère une particule κ , placée en x_κ , d'un côté de la surface élémentaire $dS(\mathbf{n})$ sur laquelle on veut calculer la contrainte, et une particule φ , placée en x_φ , de l'autre côté; ensuite il compare deux déformations homogènes infinitésimales, une avec la seule composante $E_{jj} \neq 0$ et l'autre avec la seule composante $E_{ij} \neq 0$, telles que la particule κ rejoind dans les deux cas la position x'_κ en se déplaçant de $\lambda_{\varphi\kappa}$ en direction \mathbf{e}_j .

On obtient après déformation :

$$\begin{aligned} \rho'_{\varphi\kappa} &= \rho_{\varphi\kappa} \eta_{\varphi\kappa}(\mathbf{E}) \approx \rho_{\varphi\kappa} (1 + n_{\varphi\kappa j} \lambda_{\varphi\kappa}(\mathbf{E})) \\ \lambda_{\varphi\kappa}(\mathbf{E}) &= \begin{cases} E_{jj} n_{\varphi\kappa j} & \text{si } E_{jj} \neq 0, \\ E_{ij} n_{\varphi\kappa j} & \text{si } E_{ij} \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

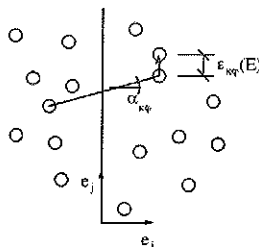


FIG. 3.2 – Schéma de la démonstration de de Saint-Venant des relations de Cauchy.

Faute de précisions de sa part, on devrait supposer qu'il se place de façon implicite dans le cadre bâti par Cauchy, en employant une fonction intensité de l'action dipolaire. Mais Saint-Venant postule que « les actions développées entre les molécules m, n dans la direction mn par ces deux déformations suivent le même rapport » que les allongements $\lambda_{\varphi\kappa}(\mathbf{E})$ des dipôles (*cf.* 3.8) : au premier ordre cette action est donc fonction linéaire de l'allongement du dipôle, ce qui était aussi affirmé par Lamé (*cf.* [55] §4), et annonce l'introduction d'un potentiel dipolaire.

La direction des actions est, d'après l'auteur, celle du dipôle avant déformation, ce qui introduit une erreur sans conséquence si la contrainte initiale est nulle. On reconstruit ci-dessous ce raisonnement en forme mathématique, en employant l'idée de potentiel dipolaire comme l'auteur l'introduit dans l'Appendice complémentaire cité.

L'hypothèse fondamentale de Saint-Venant est que le potentiel total du système est donné par la somme des potentiels dipolaires. Ceux-ci sont tels que le module de la force $\mathbf{f}_{\varphi\kappa}(\rho'_{\varphi\kappa})$ échangée entre φ et κ lorsque leur distance est devenue $\rho'_{\varphi\kappa}$ est donné par la dérivée du potentiel dipolaire $\phi(\rho_{\varphi\kappa})$ calculée en $\rho'_{\varphi\kappa}$. Pour abrégé la notation on prend ici des potentiels volumiques contrairement à Saint-Venant.

Après la petite déformation E_{jj} ou E_{ij} les actions dipolaires sont (0 indique les valeurs en configuration non déformée; cf. formule (216) *op. cit.*) :

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}_{\varphi\kappa}(\rho'_{\varphi\kappa})| &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right|_{\rho'_{\varphi\kappa}} \\ &\approx \left. \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right|_{\rho_{\varphi\kappa}} + \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} \right|_{\rho_{\varphi\kappa}} (\rho'_{\varphi\kappa} - \rho_{\varphi\kappa}) \\ &\approx \phi'_0 + \phi''_0 \rho_{\varphi\kappa} n_{\varphi\kappa j} \lambda_{\varphi\kappa}(\mathbf{E}) \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{C} = \{\alpha = (\varphi, \kappa); dS(\mathbf{n})\}$ l'ensemble des couples distincts de particules séparées par la surface unitaire dS de normale \mathbf{n} . Le vecteur contrainte $\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{E})$ sur $dS(\mathbf{n})$ est, dans les deux cas de déformation envisagés (voir figure 3.2) :

$$\begin{aligned} t_i(\mathbf{n}, E_{jj}) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \phi'_0 n_{\alpha i} + \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} (-\phi'_0 + \phi''_0 \rho_{\alpha}) n_{\alpha i} n_{\alpha j} E_{jj} n_{\alpha j}, \\ t_j(\mathbf{n}, E_{ij}) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \phi'_0 n_{\alpha j} + \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \phi'_0 n_{\alpha i} E_{ij} + \\ &\quad \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} (-\phi'_0 + \phi''_0 \rho_{\alpha}) n_{\alpha j} n_{\alpha i} E_{ij} n_{\alpha j}; \end{aligned} \quad (3.9)$$

dans l'hypothèse de contrainte nulle à déformation nulle, la première sommation aux second membres des équations (3.9), et donc aussi la deuxième sommation dans l'expression de $t_j(\mathbf{n}, E_{ij})$, s'annulent et on a les symétries :

$$\frac{t_i(\mathbf{n}, E_{jj})}{E_{jj}} = \frac{t_j(\mathbf{n}, E_{ij})}{E_{ij}} \Leftrightarrow \frac{T_{ih}(E_{jj})n_h}{E_{jj}} = \frac{T_{jh}(E_{ij})n_h}{E_{ij}} \quad \forall \mathbf{n},$$

qui correspondent aux relations de Cauchy (3.7).

On remarque que des termes comme dans la deuxième sommation dans l'expression de $t_j(\mathbf{n}, E_{ij})$ sont, d'après Saint-Venant, négligeables lorsque « la contrainte initiale est de même ordre de grandeur que la déformation », ce qu'il considère toujours vrai sauf cas exceptionnels. On remarque finalement que, comme dans la démonstration faite par Cauchy, à cause de l'uniformité de la déformation imposée, l'équilibre du système de particules à l'état actuel n'a pas été assuré.

3.3.4 La contribution de Poincaré à la généralisation du problème

En 1892 Poincaré emploie le concept de potentiel total du système de particules pour en décrire l'état actuel (*cf.* [84]). Son approche se situe dans la ligne de la relecture des résultats obtenus au début du siècle à l'intérieur d'un cadre de connaissances physiques approfondies.

L'hypothèse initiale de Poincaré est que, pour la collection de particules étudiée, il existe un potentiel qui ne dépend que de l'ensemble des distances dipolaires. Dans la configuration actuelle ce potentiel s'écrit (l'indice $\alpha \in \mathcal{C}$ dénombrant l'ensemble des dipôles) :

$$\psi(\mathbf{U}) = \psi(\{\rho'_\alpha | \alpha \in \mathcal{C}\}),$$

où, si la configuration est caractérisée par l'élongation *uniforme* $\mathbf{U} = \mathbf{I} + \mathbf{E}$, ρ'_α s'écrit comme dans (3.1) en fonction de ρ_α et \mathbf{E} . Afin de suivre formellement la démarche de Poincaré on introduit la notation $\mathbf{r}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{n}_\alpha$ et on écrit (3.1) dans la forme :

$$\rho'_\alpha = \sqrt{\epsilon_\alpha(\mathbf{U})}, \quad \epsilon_\alpha(\mathbf{U}) = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{U} \mathbf{U} \mathbf{r}_\alpha.$$

En développant la fonction $\psi(\mathbf{U})$ en série de puissances au voisinage de l'état indéformé on obtient une estimation de la contrainte en configuration initiale, qui est le coefficient du terme linéaire, et du tenseur d'élasticité, coefficient du terme de second ordre :

$$\mathbf{T}_0 = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \rho_\alpha} \right|_0 \frac{\mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\alpha}{\rho_\alpha} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \sum_{\beta \in \mathcal{C}} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho_\alpha \partial \rho_\beta} \right|_0 \frac{\mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\beta \otimes \mathbf{r}_\beta}{\rho_\alpha \rho_\beta} + \\ &\quad \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \frac{1}{\rho_\alpha} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \rho_\alpha} \right|_0 \left[2 \text{sym}(\mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{r}_\alpha) - \frac{\mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\alpha}{\rho_\alpha^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Mais Poincaré considéra les rayons \mathbf{r}_α comme des variables indépendantes et développa la fonction $\psi(\mathbf{r}_\alpha)$ en série de Taylor pour substituer ensuite les fonctions $\mathbf{r}_\alpha(\mathbf{U})$ approchées au premier ordre. Il obtint donc une expression de \mathbb{C} qui diffère de celle donnée ci-dessus à cause de l'absence du deuxième terme de (3.11), ce qui lui fait croire que les relations de Cauchy sont vérifiées si et seulement si la dérivée seconde du potentiel total par rapport aux dipôles différents s'annule,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{r}_\alpha \partial \mathbf{r}_\beta} = 0 \quad \text{si } \alpha \neq \beta \quad (3.12)$$

(hypothèse qu'il attribua, vraisemblablement à raison, à Saint-Venant et qui est connue depuis sous ce nom).

Poincaré, pour expliquer la négation expérimentale des relations de Cauchy, remet donc en cause l'hypothèse de Saint-Venant. Cette négation peut paraître

pertinente ; elle s'appuie toutefois sur un raisonnement faux au sens où elle n'est pas nécessaire pour expliquer la non validation expérimentale des relations de Cauchy. En considérant les rayons entre particules comme des variables indépendantes Poincaré négligea la compatibilité du déplacement du système de particules – il n'y a que $3N$ variables indépendantes parmi les $N(N-1)/2$ rayons dipolaires joignant N (> 7) particules. Néanmoins la démarche qu'il suit a l'avantage d'être systématique et va nous conduire aux développements du paragraphe suivant ; en outre, en cas de contrainte initiale nulle, l'erreur introduit en négligeant la compatibilité des déplacements des particules n'a pas de conséquences sur le résultat (si $\mathbf{T}_0 = \mathbf{0}$ alors le deuxième terme de (3.11) est nul aussi).

3.3.5 Calcul du tenseur d'élasticité

Position du problème

En suivant le mouvement de N particules on se réfère à l'ensemble de leurs position et orientation initiales :

$$\{(x_\kappa, \mathbf{Q}_\kappa) \in \mathcal{E} \times Orth^+ \mid \kappa \in \{1, \dots, N\}\}$$

et on se donne un ensemble des déplacements généralisés et des positions généralisées actuelles :

$$\begin{aligned} &\{(\mathbf{u}_\kappa, \mathbf{R}_\kappa) \in \mathcal{V} \times Orth^+ \mid \kappa \in \{1, \dots, N\}\}, \\ &\{(x'_\kappa, \mathbf{Q}'_\kappa) \in \mathcal{E} \times Orth^+ \mid \kappa \in \{1, \dots, N\}\}, \\ &x'_\kappa = x_\kappa + \mathbf{u}_\kappa, \quad \mathbf{Q}'_\kappa = \mathbf{R}_\kappa \mathbf{Q}_\kappa. \end{aligned}$$

On considère que, à cause des interactions entre particules, à la configuration de référence correspond le potentiel :

$$\psi_0 = \psi (\{\mathbf{r}_{\kappa\vartheta} \cdot \mathbf{B}_{\kappa\vartheta} \mathbf{r}_{\kappa\vartheta} \mid (\kappa, \vartheta) \in \{1, \dots, N\}^2\}), \quad (3.13)$$

avec $\mathbf{r}_{\kappa\vartheta} = x_\vartheta - x_{\kappa\text{appa}} \in \mathcal{V}$ rayon joignant deux particules et $\mathbf{B}_{\kappa\vartheta} \in Sym$ tenseur qui définit la contribution du dipôle au potentiel total en tenant compte d'une possible anisotropie des particules. Ces tenseurs peuvent être définis par :

$$\mathbf{B}_{\kappa\vartheta} := \mathbf{Q}'_\kappa \mathbf{Q}'_\vartheta \mathbf{A} \mathbf{Q}'_\vartheta \mathbf{Q}'_\kappa$$

avec $\mathbf{A} \in Sym$ tenseur matériel donnant une forme ellipsoïdale du potentiel dipolaire ; cette forme est indépendante de la position et de l'orientation des particules du dipôle (pour simplifier on suppose que toutes les particules sont de même nature, le tenseur \mathbf{A} devant éventuellement dépendre de la nature des particules constituant le dipôle).

L'idée que l'action entre deux particules puisse dépendre de leur orientation relative à cause de leur forme non sphérique remonte à Poisson [85], qui l'employa aussi pour réfuter la validité des relations de Cauchy dans les matériaux cristallins.

Un potentiel défini comme dans la formule (3.13) est invariant dans tout mouvement rigidifiant. Suite à un changement relatif des positions généralisées des particules, on a le potentiel :

$$\psi' = \psi (\{\mathbf{r}'_{\kappa\vartheta} \cdot \mathbf{B}'_{\kappa\vartheta} \mathbf{r}'_{\kappa\vartheta} \mid (\kappa, \vartheta) \in \{1, \dots, N\}^2\}), \quad (3.14)$$

où $\mathbf{r}'_{\kappa\vartheta}$ et $\mathbf{B}'_{\kappa\vartheta}$ dépendent des paramètres choisis pour décrire ledit ensemble de déplacements généralisés des particules.

Afin d'établir un modèle mécanique continu du système discret de particules il est nécessaire d'introduire une hypothèse, dite de « *localisation cinématique* », qui permet de représenter les déplacements généralisés des éléments du système discret par des champs continus définis sur un domaine approprié. L'approche proposée par Cauchy et suivie par tous les auteurs se plaçant dans les mêmes hypothèses physiques consiste dans le choix d'un champ de déformation uniforme. Dans l'étude des réseaux cristallins diatomiques Born introduit plus tard l'hypothèse que deux champs de déformation uniforme soient nécessaires [11]. Les passages qui suivent permettent de donner une réponse générale et de trouver une solution approchée jusqu'à l'ordre choisi au problème soulevé par Born dans le cas particulier des réseaux diatomiques.

Soit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble de points $\{x_\kappa \in \mathcal{E} \mid \kappa \in \mathcal{N}\}$; soit par hypothèse $\text{meas} \mathcal{B} = 1$.

Le mouvement des points $x \in \mathcal{B}$ est décrit par des champs de déplacement $\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}$, de sorte que $x' = x + \mathbf{u} \in \mathcal{B}'$ soient leurs positions actuelles et que $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{E}$ soit l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\{x'_\kappa \in \mathcal{E} \mid \kappa \in \mathcal{N}\}$.

La description du système de particules comme milieu continu se base sur la substitution du problème écrit sur le système discret par un problème écrit sur \mathcal{B} .

Remarques générales

Soit \mathcal{U} l'ensemble des champs de déplacement donnant lieu à des petites déformations homogènes de \mathcal{B} sans rotation comme dans le cas traité par Cauchy. Pour le définir il convient d'introduire la notation

$$\text{Sym}_0^+ \equiv \{\mathbf{A} \in \text{Sym}^+ \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{w} \ll \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}\},$$

pour l'ensemble des « *petits* » tenseurs symétriques; les déplacements que l'on va étudier sont

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \text{Grad} \mathbf{u} \in \text{Sym}_0^+.$$

Soit $\langle a \rangle$ la moyenne d'un champ a sur \mathcal{B} . La relation

$$\langle \text{grad} \mathbf{u} \rangle = \langle \text{grad} \mathbf{v} \rangle \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$$

est une équivalence entre éléments de \mathcal{U} . Si \mathcal{U}_E dénote la classe d'équivalence $\langle \text{grad} \mathbf{u} \rangle = \mathbf{E}$, $\mathbf{E} \in \text{Sym}_0^+$, le quotient de \mathcal{U} par rapport à cette relation est en relation biunivoque avec Sym_0^+ .

Deux champs équivalents diffèrent par un champ dans \mathcal{U}_0 (c'est à dire un champ dont le gradient est à moyenne nulle sur \mathcal{B}). En fixant $o \in \mathcal{E}$, pour tout $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ il existe un champ $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}_0$:

$$\tilde{\mathbf{u}}(x) := \mathbf{u}(x) - \langle \text{gradu} \rangle (x - o);$$

donc $\mathcal{U} \equiv \{\tilde{\mathbf{u}}(x) + \mathbf{E}(x - o) \mid \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}_0; \mathbf{E} \in \text{Sym}_0^+\}$.

Pour un ensemble donné de déplacements des particules $\{\mathbf{u}_\kappa\}$, on considère un champ interpolation $\mathbf{u}_\mathcal{N}$ tel que

$$\mathbf{u}_\mathcal{N}(x_\kappa) = \mathbf{u}_\kappa \quad \forall \kappa \in \mathcal{N} \equiv \{1, \dots, N\}.$$

Si $\{\mathbf{u}_\kappa\}$ est tel qu'il existe un champ d'interpolation $\mathbf{u}_\mathcal{N} \in \mathcal{U}$, on peut écrire

$$\mathbf{u}_\kappa = \langle \text{grad u}_\mathcal{N} \rangle (x_\kappa - o) + \tilde{\mathbf{u}}_\kappa;$$

où les vecteurs $\tilde{\mathbf{u}}_\kappa$ sont tels que leur champ interpolation $\tilde{\mathbf{u}}_\mathcal{N}$ appartient à \mathcal{U}_0 . On dénote par Ξ la classe des ensembles de déplacements des particules dont le champ interpolation est à gradient de moyenne nulle sur \mathcal{B} :

$$\Xi \equiv \{\tilde{\mathbf{u}}_\kappa \mid \tilde{\mathbf{u}}_\mathcal{N} \in \mathcal{U}_0 \quad \kappa \in \mathcal{N}\}.$$

Hypothèses et conséquences

On se borne à considérer des ensembles de déplacements des particules qui peuvent être décrits par la donnée d'un champ de petite déformation homogène $\mathbf{E} \in \text{Sym}_0^+$ et d'un ensemble d'écart $\tilde{\mathbf{u}}_\kappa \in \Xi$:

$$\mathbf{u}_\kappa = \mathbf{E}(x_\kappa - o) + \tilde{\mathbf{u}}_\kappa, \quad \mathbf{E} \in \text{Sym}_0^+, \quad \tilde{\mathbf{u}}_\kappa \in \Xi. \quad (3.15)$$

L'élongation des rayons dipolaires est alors :

$$\mathbf{r}'_{\kappa\vartheta} = (\mathbf{I} + \mathbf{E})\mathbf{r}_{\kappa\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}}_\kappa - \tilde{\mathbf{u}}_\vartheta,$$

tandis que, par hypothèse de localisation des rotations, l'orientation relative de tout couple de particules demeure constante (ayant imposé une petite déformation sans rotation, les orientations des particules ne seront changées que par effet d'écart par rapport au mouvement imposé que l'on néglige par choix) :

$$\mathbf{B}'_{\kappa\vartheta} = \mathbf{B}_{\kappa\vartheta}.$$

(3.15) est une hypothèse de localisation cinématique qui s'appuie sur la contrainte cinématique $\tilde{\mathbf{u}}_\kappa \in \Xi$. Celle-ci peut être vue comme une condition de compatibilité au bord :

$$\tilde{\mathbf{u}}_\kappa \in \Xi \Leftrightarrow \int_{\partial\mathcal{B}} [\mathbf{u}_\mathcal{N} - \mathbf{E}(x - o)] \otimes \mathbf{n} \, d(\text{area}) = 0,$$

ce qui suggère l'appellation d'homogène pour une petite déformation \mathbf{E} imposée à l'ensemble des particules dans le sens de l'équation (3.15).

Suite à une petite déformation homogène \mathbf{E} les déplacements des particules suivront (3.15) avec un ensemble d'écart qui sera tel à garantir l'équilibre du

système dans la nouvelle configuration. Dans l'hypothèse d'existence d'un potentiel ψ les écarts seront donc solution du problème

$$\psi(\mathbf{E}) = \inf_{\tilde{\mathbf{u}}_\kappa \in \Xi} \phi(\{[\mathbf{U}\mathbf{r}_{\kappa\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}}_\kappa - \tilde{\mathbf{u}}_\vartheta] \cdot \mathbf{B}_{\kappa\vartheta}[\mathbf{U}\mathbf{r}_{\kappa\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}}_\kappa - \tilde{\mathbf{u}}_\vartheta] \mid (\kappa, \vartheta) \in \mathcal{N}^2\}). \quad (3.16)$$

L'existence et l'éventuelle unicité de la solution de (3.16) dépendent de la forme de ϕ . Ici on se limite à postuler que cette solution existe et est unique et que les écarts solutions du problème sont des fonctions dérivables de la déformation homogène au moins dans un voisinage de la déformation nulle :

$$\{\tilde{\mathbf{u}}_\kappa\}_{\text{solution de (3.16)}} \in C^1(\text{Sym}_0^+, \mathcal{V}^N). \quad (3.17)$$

En absence de liaisons unilatérales, les écarts solution de (3.16) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{u}}_\kappa(\mathbf{E}) = \mathfrak{o}_\kappa \mathbf{E} + o(\mathbf{E}); \quad \mathfrak{o}_\kappa := \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_\kappa}{\partial \mathbf{E}} \right|_0 \in \text{Lin}(\text{Sym}, \mathcal{V}) \quad (3.18)$$

(l'indice 0 dénote une fonction de \mathbf{E} calculée dans $\mathbf{E} = \mathbf{0}$).

Il convient d'introduire les symboles

$$\mathfrak{b}_{\kappa\vartheta} := \mathfrak{o}_\kappa - \mathfrak{o}_\vartheta \quad (3.19)$$

$$\epsilon_{\kappa\vartheta} := (\mathbf{U}\mathbf{r}_{\kappa\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}}_\kappa - \tilde{\mathbf{u}}_\vartheta) \cdot (\mathbf{U}\mathbf{r}_{\kappa\vartheta} + \tilde{\mathbf{u}}_\kappa - \tilde{\mathbf{u}}_\vartheta) \quad (3.20)$$

($\mathfrak{b}_{\kappa\vartheta}$ est symétrique sur les deux derniers indices). Dans la suite on substitue aux indices $\kappa\vartheta$ l'indice $\alpha \in \mathcal{M} \equiv \{1, \dots, N(N-1)/2\}$ dénombrant l'ensemble des couples distincts des N particules. Toujours pour abrégier la notation, on introduit le symbole sym dénotant la projection d'un tenseur d'ordre quatre dans l'espace des tenseurs de même ordre avec symétries fortes ($(\text{sym}\mathbb{D})_{ijkl} = \frac{1}{8}(D_{ijkl} + D_{jihk} + D_{jikh} + D_{ijkh} + D_{hklj} + D_{hkji} + D_{khji} + D_{khi j})$).

La contrainte en configuration initiale \mathbf{T}_0 et le tenseur de raideur élastique \mathbb{C} sont évalués en développant le potentiel solution du problème (3.16).

$$\mathbf{T}_0 := \sum_{\alpha \in \mathcal{M}} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_\alpha} \right|_0 [2 \text{sym}(\mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{B}_\alpha \mathbf{r}_\alpha) + \mathfrak{b}_\alpha^T \mathbf{B}_\alpha \mathbf{r}_\alpha], \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} := & \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{M}} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon_\alpha \partial \epsilon_\beta} \right|_0 (2 \text{sym}(\mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{B}_\alpha \mathbf{r}_\alpha) + \mathfrak{b}_\alpha^T \mathbf{B}_\alpha \mathbf{r}_\alpha) \otimes \\ & (2 \text{sym}(\mathbf{r}_\beta \otimes \mathbf{B}_\beta \mathbf{r}_\beta) + \mathfrak{b}_\beta^T \mathbf{B}_\beta \mathbf{r}_\beta) + \\ & 2 \sum_{\alpha \in \mathcal{M}} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_\alpha} \right|_0 (2 \text{sym}(\mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{B}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\alpha) + \mathfrak{b}_\alpha^T \mathbf{B}_\alpha \mathfrak{b}_\alpha + \\ & 2 \mathfrak{b}_\alpha^T \text{sym}(\mathbf{B}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\alpha) + 2 \text{sym}(\mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{B}_\alpha) \mathfrak{b}_\alpha). \end{aligned} \quad (3.22)$$

On voit que l'hypothèse de contraintes nulles en configuration initiale n'entraîne pas nécessairement l'annulation des termes de \mathbb{C} démunis des symétries de Cauchy. Les approximations « à la Voigt » de ces tenseurs (qui correspondent donc

aux résultats des auteurs étudiés dans ce texte) sont obtenues à partir des expressions (3.21) et (3.22) en négligeant les \mathbf{b}_α , effets des écarts entre la configuration actuelle équilibrée et la configuration obtenue par déformation uniforme de l'initiale. Ces approximations donnent le comportement limite du système obtenu par une disposition spatiale des particules qui maximise sa raideur globale.

Le cas $\mathbf{B}_\alpha = \mathbf{I} \forall \alpha \in \mathcal{M}$ est aussi un cas particulier, dans lequel les potentiels dipolaires sont isotropes. On retrouve alors, toujours en négligeant les écarts nécessaires pour l'équilibre, le résultat (3.11) qui, compte tenu des :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_\alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial \rho_\alpha} \frac{1}{2\rho_\alpha \eta_\alpha^2} \approx \frac{\partial \psi}{\partial \rho_\alpha} \frac{1 - \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{E} \mathbf{n}_\alpha}{2\rho_\alpha} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon_\alpha \partial \epsilon_\beta} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho_\alpha \partial \rho_\beta} \frac{1}{4\rho_\alpha \rho_\beta \eta_\alpha^2 \eta_\beta^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho_\alpha} \frac{1}{4\rho_\alpha^3 \eta_\alpha^2} \\ &\approx \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho_\alpha \partial \rho_\beta} \frac{1 - \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{E} \mathbf{n}_\alpha - \mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{E} \mathbf{n}_\beta}{4\rho_\alpha \rho_\beta} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho_\alpha} \frac{1 - 2\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{E} \mathbf{n}_\alpha}{4\rho_\alpha^3}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

et avec l'hypothèse de Saint-Venant (3.12), s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= 4 \sum_{\alpha \in \mathcal{M}} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon_\alpha^2} \right|_0 \rho_\alpha \otimes \rho_\alpha \otimes \rho_\alpha \otimes \rho_\alpha + \\ &4 \sum_{\alpha \in \mathcal{M}} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_\alpha} \right|_0 \text{sym}(\mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{r}_\alpha). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ce résultat, bien que basé sur l'hypothèse d'existence d'un potentiel dipolaire plutôt que sur celle d'existence d'une fonction force dipolaire, correspond aux hypothèses originaires de Cauchy, la deuxième sommation étant nulle si la contrainte initiale est nulle (3.6).

3.3.6 Conclusions

Une difficulté dans la compréhension du débat sur les relations de Cauchy est que, même au sein du milieu scientifique français d'inspiration moléculaire, les auteurs ont, au cours de la première moitié du siècle dernier, défendu des arguments supportant une thèse ou l'autre, parfois en changeant d'avis ou en revenant sur leurs convictions.

Un parti certainement se forma dans le temps : l'opinion que les hypothèses nécessaires à la réduction du nombre de constantes d'élasticité de 21 à 15 n'avaient pas de valeur générale, pouvant notamment être mises en cause pour les matériaux cristallins. Poisson et Lamé, et peut être aussi Cauchy, prirent cette voie. D'un autre côté, Saint-Venant, isolé dans sa position, soutint toujours la généralité de la démarche de Cauchy.

D'après Saint-Venant, Cauchy lui-même a soulevé, en 1851, des objections sur la qualité de l'hypothèse de déformation homogène pour les corps cristallins. Cauchy reprit d'ailleurs un raisonnement dû à Poisson (*cf.* [85]). Dans un cristal parfait les déplacements négligés en imposant une élongation uniforme, et

nécessaires à l'équilibre du système de particules, sont des fonctions périodiques dans l'espace dont la contribution d'ensemble peut devenir importante. Saint-Venant considère cette objection comme valide, mais voit comme tout à fait exceptionnel le cas d'un tel matériau et, de toute manière, doute de l'importance des corrections à apporter. D'après cet auteur, les résultats de la théorie moléculaire de l'élasticité ont une valeur approchée et visent à un emploi restreint aux matériaux de construction, et ils ne sont contredit, tant que la déformation reste petite, que dans des cas très particuliers. En outre, toujours d'après Saint-Venant, le cas de l'isotropie, dans lequel aucune structure périodique n'est possible, vérifierait toujours les relations établies en 1828 par Cauchy et donc un seul coefficient d'élasticité suffirait pour tout matériau isotrope.

Lamé intervint dans la discussion d'abord, du côté de Navier, Cauchy et Poisson, en donnant un seul coefficient pour l'état isotrope, et finalement en plaçant la généralité du résultat à 21 coefficients vis-à-vis des hypothèses sur l'état moléculaire nécessaires pour réduire ce nombre.

Les hypothèses en question, dans la vision des auteurs cités, sont, premièrement, celle de l'action dipolaire « *centrale* » (c'est à dire dirigée entre le centre des particules), vue déjà par Poisson en 1829 comme un cas particulier ou une approximation non applicable aux cristaux. La deuxième hypothèse attaquable, celle de la déformation homogène, fut aussi remise en cause par Cauchy, toujours à propos des cristaux parfaits, comme Poisson, mais avec une approche différente de celui-ci. Lamé aussi souligna, et avec plus de relief, l'importance de l'existence de sous-structures périodiques, moins parfaites que dans un cristal idéal.

A la fin du siècle, dans ses leçons sur l'élasticité, Poincaré attaqua radicalement cette idée en introduisant plutôt, pour justifier l'échec expérimental de la théorie, l'hypothèse d'un potentiel total non obtenu par somme de contributions dipolaires indépendantes. L'importance de l'approximation introduite par l'hypothèse de déformation homogène sortit alors du cadre de la réflexion. Néanmoins on peut affirmer que non seulement les structures périodiques, mais aussi le cas des matériaux amorphes nécessite la prise en compte de l'hétérogénéité de la déformation élastique microscopique. La valeur des résultats de la théorie moléculaire vis-à-vis du nombre de constantes d'élasticité demeure donc au premier ordre. La valeur du coefficient de Poisson de $1/4$ que l'on obtient pour les matériaux isotropes par cette théorie a donc aussi cette signification. Elle sera d'autant plus proche de la valeur réelle que le matériau se déforme de façon homogène, c'est à dire du point de vue microscopique, que les actions dipolaires sont potentiellement isotropes et que la disposition des particules dans l'espace maximise la raideur du système.

En conclusion on peut écrire le problème de l'équilibre élastique d'un système discret de particules à partir de la cinématique d'un milieu continu équivalent. En tenant compte des fluctuations dans le mouvement des particules par rapport à celui du milieu on obtient des coefficients d'élasticité qui ne vérifient pas les relations de Cauchy. Ces relations ne peuvent être obtenues que si on adopte en même temps les approximations suivantes :

- déformation homogène dans le système discret,
- potentiels dipolaires isotropes,

– état de contrainte initial nul,
 en négligeant en outre, comme déjà établi à la fin du XIX^e siècle par Voigt et Poincaré en particulier, toute action inter-particules non centrale et tout effet dynamique non dipolaire.

Il faut noter que, à la différence des quatre dernières objections, portant sur des hypothèses physiques, l'hypothèse de déformation homogène est de nature mathématique et elle est décisive quant à la qualité de l'approche « *moléculaire* ». Il est remarquable que les approximations implicites dans les hypothèse de déformation homogène et de potentiels dipolaires isotropes aient été vues par Cauchy et Poisson et oubliées dans la suite de l'histoire.

3.4 Les premiers modèles de matériaux non simples

Suivant la définition introduite par Truesdell et Noll (*cf.* [105, 80]), un matériau est « *simple* » si la collection d'événements cinématiques nécessaires pour déterminer la contrainte se réduit à la seule histoire du gradient de la déformation.

La description faite par Navier, Poisson ou Cauchy du mouvement d'un ensemble de particules par le biais de champs continus peut être vue comme une approximation au premier ordre du mouvement réel de cet ensemble. Poisson et Cauchy envisageaient en effet la possibilité de descriptions plus fines ; le deuxième suggérait même une démarche analytique pour l'écriture d'équations de bilan valable jusqu'à l'ordre souhaité (*cf.* [19]).

Dans les années 1860 les premiers essais pour l'établissement de théories d'ordre supérieur apparaissent dans la littérature, suivant la proposition de Cauchy, grâce à l'œuvre de Kleitz [52] et Levy [26, 25], spécialement pour l'étude des écoulements des fluides, et de Saint-Venant [25]. Les difficultés techniques, mais surtout des à priori philosophiques décourageaient le développement d'autres théories de ce type, de sorte que ces premiers essais restaient isolés pendant presque trois quarts de siècle (*cf.* [105]).

On analyse les hypothèse physiques à la base du travail des auteurs cités afin de comprendre la cause du rejet académique des théories de gradients supérieurs, définitivement établi en 1872 (*cf.* [28]) :

« On peut espérer, pour l'avenir, que des labeurs aussi intelligents et dévoués ne seront plus prodigués en pure perte ».

3.4.1 Le fluide newtonien

Dans [73] (*Liber Secund. Sect. III Prop. XIV Theor. XI Scholium*) Newton écrit : « *Resistentia corporum sphaericorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex densitate medii* ». Donc, en général, dans l'étude

des fluides il faut tenir compte de la cohésion (*tenacitate*), de la viscosité (*frictione*) et de l'inertie (*densitate medii*; cf. [71, 65]).

Dans l'étude du vortex, Newton simplifia fortement cette vision de l'état fluide (⁴); il imagina une collection de couches concentriques, de consistance solide, glissant l'une sur l'autre, et échangeant un effort de frottement. Alors "*the resistance arising from the want of lubricity [la viscosité] in the parts of a fluid is, other things being equal, proportional to the velocity with which the parts of the fluid are separated from one another* » (cf. [74, 71]) :

$$\mathbf{T} = 2\gamma \text{symgradv}. \quad (3.26)$$

Cette idée de « frottement du fluide », dont l'origine seraient les chocs entre particules à l'interface entre couches du vortex, fut attribuée par de Saint-Venant à Descartes; elle arriva au géomètres du XIX^e siècle par l'œuvre de Mariotte, Pitot, Couplet, D. Bernoulli et Coulomb (cf. [26]).

Le modèle newtonien s'affirma contre deux types d'oppositions :

- la vision post-cartésienne conservatrice, démentie par le paradoxe de d'Alembert, qui considère l'inertie comme la seule force à l'origine de la résistance au mouvement dans les fluides ;
- la formulation de modèles plus compliqués, à l'occurrence « *non-simples* », comme par exemple dans [6].

En citant un mémoire d'Amontons publié par l'Académie en 1699, Jean Bernoulli observa à propos du frottement intérieure dans les fluides : « Que la résistance causée par le frottement des surfaces de différentes étendues est toujours la même [...] lorsque les pressions sont égales » (cf. [5]). Cette affirmation conduit à supposer le coefficient de viscosité fonction de la pression (cf. aussi [18] p. 186).

3.4.2 Les équations de Navier-Stokes

Les « *molécules* » des géomètres français du début du XIX^e siècle étaient des points-masse de l'espace euclidien – définis par la donnée de trois coordonnées cartésiennes et d'une masse positive – qui interagissaient entre eux par des forces à distance. Lors du mouvement, d'autres forces apparaissaient. Le modèle continu était obtenu par deux passages :

- la définition d'une procédure de sommation des effets engendrés par un nombre très élevé, mais fini, de particules,
- le développement limité en série de Taylor des fonctions des coordonnées cartésiennes des particules décrivant leur mouvement.

Le premier passage demanda beaucoup de réflexion, et plusieurs définitions furent proposées (cf. [3]), alors que le deuxième fût universellement accepté.

Le même schéma fût poursuivi tant dans l'étude des corps solides élastiques que pour d'autres corps, à la seule exception que :

⁴Conformément à la règle « *Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & veræ sint & earum phaenomenis explicandi sufficienti* » (cf. [73] *Tomii Tertii Pars I Regula I*).

« Dans un corps solide non élastique, les pressions ou tensions ne dépendent pas seulement du changement de forme que le corps éprouve en passant de l'état naturel à un nouvel état, mais aussi des états intermédiaires et du temps pendant lequel le changement de forme s'effectue » (cf. [18] p. 183 et p. 186).

Pour les fluides alors, qui – par définition – n'ont pas d'état naturel, l'état de contrainte ne dépendra que du changement de forme du corps dans un petit intervalle de temps précédent l'instant actuel.

L'hypothèse que les déplacements peuvent être obtenus par intégration sur un petit intervalle de temps de vitesses uniformes dans l'intervalle devint une conjecture fondamentale dans l'étude des fluides ; ainsi de Saint-Venant écrit :

« Cauchy remarque que dans les corps mous ou fluides, d'où les réactions élastiques ont disparu en tant que pouvant ramener complètement leurs états antérieurs, les tensions à chaque instant ne dépendent plus des changements totaux de forme éprouvé, mais seulement des changements qui viennent d'avoir lieu dans un instant très court, ce qui revient bien à dire qu'elles dépendent des vitesses relatives actuelles ».

Pour obtenir le modèle du fluide newtonien et les équations dites de Navier-Stokes, il ne reste alors qu'à postuler une relation constitutive linéaire et isotrope :

« parmi les hypothèses que l'on peut faire à ce sujet, l'une des plus naturelles consiste à supposer que les trois pressions ou tensions principales sont en chaque point proportionnelles aux trois condensations ou dilatations instantanées et principales » (cf. [18]) ;

une contribution à l'état de contrainte « proportionnelle à la quantité [...] qui mesure la dilatation ou la condensation instantanée du volume » (cf. [18]) peut, dans certain cas, être nécessaire (soit $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{x}}$ la vitesse matérielle) :

$$\mathbf{T} = 2\gamma \operatorname{symgrad} \mathbf{v} + \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{I}, \quad (3.27)$$

d'où les équations de Navier-Stokes

$$\gamma \Delta \mathbf{v} + (\gamma + \varepsilon) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.28)$$

(Conformément au résultats de la théorie « *rari-constant* » on posa ensuite $\gamma = \varepsilon$).

Dans la seconde moitié du XIX^e siècle, le modèle de Navier-Stokes fut proposé pour décrire, d'une façon éventuellement approchée, l'écoulement des cours d'eau entraînant des éventuelles turbulences. Darcy (suivi par Bazin) proposa en 1854 la modification de la loi du frottement intérieur du fluide suggérée par Newton pour lui donner une forme quadratique. Cela conduisit Dupuit à l'écriture, plus générale, du cisaillement intérieur dans les fluides comme une somme des puissances du taux de déformation.

Le débat sur la pertinence de la loi de Newton venait ainsi de se rouvrir, après la grande saison des géomètres qui avait sut établir des résultats de portée très générale en choisissant dans leur bagage culturel les propositions les plus riches.

« Je dirai seulement, en attendant, que si l'hypothèse de Newton, reproduite par MM. Navier et Poisson, et qui consiste à prendre le frottement intérieur proportionnel à la vitesse relative des filets glissant les uns devant les autres, peut être appliquée approximativement pour les divers points d'une même section fluide, tous les faits connus portent à inférer qu'il faut faire croître le *coefficient* de cette proportionnalité avec les dimensions des sections transversales; ce qui s'explique jusqu'à un certain point en remarquant que les filets ne marchent pas parallèlement entre eux avec des vitesses régulièrement graduée de l'un à l'autre, et que les *ruptures*, les tourbillonnements et les autres mouvements compliqués ou obliques, qui doivent beaucoup influencer sur la grandeur des frottements, se forment et se développent davantage dans les grandes sections » (cf. [24], les parties en italiques correspondent à l'original; cf. aussi [27] où l'auteur explique la signification des vitesses du modèle de Navier-Stokes lorsque l'écoulement est « d'apparence tumultueuse et désordonnée » comme des « moyennes locales » des vitesses des particules, et cf. [28]).

3.4.3 Le cristal hétérogène de Cauchy

Poisson imagina que la solution continue d'un problème de mécanique représente le premier terme d'un développement asymptotique par rapport à la distance intermoléculaire moyenne (cf. [3]) :

« Les expressions de u , v , w , dont il s'agit, satisfont aux équations différentielles relatives à l'intérieur et à la surface du fluide en mouvement [...] et les séries qui en résultent étant d'ailleurs très convergentes, cela suffit pour qu'elles représentent la solution du problème, quoiqu'un de leurs caractères particuliers soit de ne pas toujours satisfaire aux équations qui se déduisent de celles du problème par de nouvelles différentiations » (cf. [86] p. 174).

L'analyse de Cauchy de cette vision de Poisson du corps cristallin (cf. [87]) est publiée dans [19]. D'après de Saint-Venant, Cauchy rejeta ce modèle tout de suite après sa publication (cf. [70] *Appendix V* §64).

Suivant Poisson, Cauchy imagine que une particule soit un ensemble d'atomes, par exemple la cellule élémentaire d'un réseau cristallin. Par conséquent les constantes d'élasticité (que l'on notera κ en général) et le champ de déplacement des atomes u seront par hypothèse des fonctions périodiques de l'espace, avec période donnée par la distance interatomique (éventuellement fonction de la direction dans le réseau, et donc décrit par un vecteur \mathbf{a}) :

$$\left. \begin{aligned} \kappa(x) &= \kappa(x \pm \iota \mathbf{a}) \\ \mathbf{u}(x) &= \mathbf{u}(x \pm \iota \mathbf{a}) \end{aligned} \right\} \quad \forall \iota \in \mathbb{N}. \quad (3.29)$$

Ces fonctions peuvent alors être développées en séries trigonométriques et donner autant d'équations avec coefficients constants que de termes dans leur développement. Pour simplifier on peut ensuite négliger toute contribution d'ordre deux ou supérieur en \mathbf{a} par rapport au premier ordre.

Pour le petit déplacement moyen \mathbf{u} des atomes on obtient les équations (le choix de N , M et L étant arbitraire, mais en négligeant les forces de volume) :

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n \Delta^n \mathbf{u} + \sum_{n=0}^M \beta_n \Delta^n \text{grad div} \mathbf{u} + \sum_{n=0}^L \gamma_n \Delta^n \text{rot} \mathbf{u} = \ddot{\mathbf{u}} \quad , \quad (3.30)$$

qui se réduit à

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div} \mathbf{u} - \text{grad} \pi + \eta \Delta \text{rot} \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.31)$$

en prenant la relation constitutive

$$\mathbf{T} = 2\mu \text{symgrad} \mathbf{u} + (\lambda \text{div} \mathbf{u} - \pi) \mathbf{I} + 2\eta \text{symgrad} \text{rot} \mathbf{u} \quad . \quad (3.32)$$

3.4.4 Le fluide de Kleitz

En 1866 Kleitz visa à l'élimination de certaines simplifications courantes dans la modélisation des fluides à son époque. En particulier il considéra fautive en général l'hypothèse, utilisée dans l'intégration des équations du mouvement, que les lignes de courantes soient parallèles entre elles. Son point de vue revient sur l'idée de Newton pour le vortex, qui avait conduit à l'écriture de la loi de la viscosité pour chaque filet fluide et non pas pour l'ensemble du courant. Par conséquent Kleitz écrit l'expression de $\text{grad} \mathbf{v}$ suivant un filet fluide, dans le système de coordonnées curvilignes engendré par la trajectoire de la particule. Les travaux des ingénieurs contemporains employant le modèle de Navier-Stokes pour les calculs des écoulements des cours d'eau suivaient plutôt la direction inverse, en assignant éventuellement un coefficient de viscosité fonction de la section du courant (*cf.* [24]).

Par conséquent – et c'est là l'intérêt majeur – Kleitz considéra le coefficient de viscosité fonction linéaire de la puissance des actions intérieures, ce qui introduit des puissances d'ordre trois des dérivés de la vitesse dans la loi de comportement :

$$\mathbf{T} = 2\varphi \text{symgrad} \mathbf{v} - \pi \mathbf{I}, \quad (3.33)$$

où φ est une fonction objective de \mathbf{v} que l'auteur prend dans la forme

$$\varphi = \varphi(\text{symgrad} \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v}) = \epsilon_1 + \epsilon_2 \text{symgrad} \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v}. \quad (3.34)$$

L'hypothèse constitutive de Kleitz rappelle la critique de J. Bernoulli au modèle newtonien du vortex (*cf.* [5]). Ce modèle avait été établi en imaginant des conditions d'écoulement très ordonnées, notamment sans variations de volume; l'approfondissement de la réflexion sur le rôle que la compressibilité du fluide jouerait éventuellement sur sa viscosité demeurerait nécessaire.

Les objections de de Saint-Venant à ce modèle (d'abord rapporteur favorable à l'Académie, s'opposant ensuite à l'approche de Kleitz dans un long mémoire faisant le point sur l'hydrodynamique; *cf.* [28] p. 655 et suivantes, p. 693 et suivantes) sont essentiellement basées sur le rejet des hypothèses physiques

qui conduisent l'auteur à supposer nécessaire l'introduction de termes d'ordre supérieur et sur le doute d'utilité d'un modèle si compliqué. En outre, les termes d'ordre supérieur introduits par la formule (3.34), déduite de l'hypothèse que la force entre deux molécules dépend des puissances impaires de leur vitesse relative, ne représentent pas un développement complet jusqu'à l'ordre supérieur fixé de la description moléculaire du mouvement.

La formule (3.33) proposée par Kleitz ne tient donc pas en égale considération tous les termes d'ordre supérieur au premier. Ce choix, légitime – si justifiée par l'expérience – dans la pratique de l'ingénieur, donne à Saint-Venant un argument mathématique pour refuser le modèle.

Une deuxième objection soulevée par de Saint-Venant est due à l'usage de l'expression $\mathbf{v}_\kappa - \mathbf{v}_\varphi = \text{grad}\mathbf{v}(x_\kappa - x_\varphi)$ pour la différence des vitesses des deux particules κ et φ qui échangent une action visqueuse (et donc très proches); Saint-Venant considère – à tort – cette expression dépourvue de généralité en transformation finie.

Mais fondamentalement c'est l'idée de pousser l'approximation plus loin que dans les travaux de Navier qui semble effrayer de Saint-Venant :

« C'est avec raison que Navier et Poisson n'ont tenu compte que des premières puissances, tant des distances dans le développement des vitesses relatives, que de ces vitesses elles-mêmes, une fois évaluées, dans le calcul des actions moléculaires; ces actions n'ayant des valeurs sensibles qu'à des distances excessivement petites. Si l'on voulait exprimer les vitesses relatives réelles ou individuelles, et les actions, aussi réelles, qui ont lieu dans les mouvements plus compliqués des centaines de termes ne seraient pas de trop, et n'attendraient même aucun but, puisque ces mouvements, que nous appelons *irréguliers*, changent d'un instant à l'autre, et même rapidement » (cf. [28] p. 695).

3.4.5 Le fluide de Levy

En 1868 Levy s'opposa aux suggestions dérivées de l'idée de Darcy (modification de l'expression du cisaillement dans le fluide) sur la base du théorème de Cauchy sur la symétrie du tenseur de contrainte (cf. [28] p. 430). Le modèle qu'il proposa se résume dans l'équation constitutive

$$\mathbf{T} = \pi \mathbf{I} + 2\epsilon_0 \text{symgrad}\mathbf{v} + 2 \sum_{n=1}^N \epsilon_n \Delta^n \text{symgrad}\mathbf{v} \quad (3.35)$$

avec $N \in \mathbb{N}$ choisi aussi grand que nécessaire.

Ce modèle fut établi par Levy en exprimant la contrainte en fonction linéaire des gradients de tous les ordres de vitesse et en imposant ensuite la condition d'isotropie. Le même résultat fut obtenu par Saint-Venant, rapporteur à l'Académie, par la théorie moléculaire, en poussant jusqu'à l'ordre N le développement en série de Taylor des vitesses relatives des particules en fonction de leur distance.

En 1869 l'avis du rapporteur fut donc favorable : « Il n'est pas impossible que les dérivées des vitesses, d'ordre supérieur au premier, aient une certaine influence » (cf. [26] p. 589). Mais en 1872 de Saint-Venant remarqua que ce modèle – mathématiquement bien fondé au contraire de celui de Kleitz – nécessite la détermination expérimentale de $N+1$ coefficients et qu'il est nécessaire d'imposer un nombre égale de conditions aux bord, ce qui ne laisse pas d'espoir pour les applications (cf. [28]).

Des telles objections sont de nature générale, le modèle de Levy comportant des équations aux dérivées partielles de degré plus élevé que le modèle de Navier-Stokes qu'il prétend améliorer, mais elles ne seraient pas justifiées si ce modèle plus riche était nécessaire pour mieux représenter la réalité.

Sur ce point – essentiel – les arguments de de Saint-Venant semblent basés sur l'échelle des distances à laquelle il imagine que l'étude des fluides doit être fait :

« D'abord, les analyses de ces deux auteurs [Kleitz et Levy] supposent, disons-nous, que les mouvements effectifs des molécules sont réguliers, ou que u, v, w représentent les vitesses *réelles* de chaque molécule. Elles ne sauraient donc s'appliquer lorsque les mouvements sont tumultueux, et que u, v, w ne désignent plus que les vitesses moyennes locales ou de translation des centres de gravité d'éléments finis : car les expressions qu'ils prennent pour représenter les forces en fonction de u, v, w ne formeraient alors qu'une partie tout à fait minime des actions résistantes se trouvant en jeu, la partie la plus grande étant certainement due aux mouvements relatifs visibles s'effectuant avec les vitesses, souvent considérables, des portions tourbillonnantes qui glissent brusquement les unes contre les autres ».

L'opposition de l'Académie, motivé par de Saint-Venant, à ces deux essais fut donc aussi basée sur la capacité de calcul limitée de l'époque : dans le sentiment du rapporteur la mécanique doit résoudre de problèmes, non seulement les poser, et aucune solution ne pouvait être poursuivie pour des fluides de Levy ou Kleitz au XIX^e siècle, d'autant plus si on envisageait des calculs étendus à des cours d'eau.

3.4.6 Le solide élastique de de Saint-Venant

Suivant la suggestion de Levy, et la méthode de Navier et Cauchy, de Saint-Venant proposa l'équation constitutive d'un type particulier de solide élastique isotrope, dans lequel le gradient du déplacement produit des contraintes sensibles jusqu'au sixième ordre (cf. [25]) :

$$\mathbf{T} = \sum_{n=0}^3 \epsilon_n \Delta^n \operatorname{divv}\mathbf{I} + 2 \sum_{m=0}^3 \epsilon_m \Delta^m \operatorname{symgradv} + 2 \sum_{p=1}^3 p\epsilon_p \Delta^{p-1} \operatorname{gradgrad divv}. \quad (3.36)$$

Comme on l'a montré au §3.3, la méthode employée par Cauchy pour la dérivation des équations d'équilibre d'un système de molécules néglige toute écart du mouvement des particules par rapport au mouvement de déformation uniforme du

milieu continu équivalent, bien que ces écarts soient, en général, des fonctions de la déformation imposée au bord du système de même ordre que les allongements moyens des dipôles. Cette limitation peut être particulièrement négative pour le résultat lorsque des gradients d'ordre supérieur doivent être introduits. Mais Saint-Venant ne donna pas l'expression des coefficients de l'équation (3.36) dans lesquelles la limitation en objet pourrait introduire des erreurs, tandis que la formule (3.36) demeure valable, pouvant être déduite de considérations d'isotropie comme l'avait fait Levy pour son modèle de fluide.

3.5 Conclusions

Il existe des questions de grande actualité dont la discussion était déjà au centre de l'activité scientifique lors de l'établissement de la mécanique des milieux continus. Quelles sont les hypothèses les plus faibles dans lesquelles on peut se placer pour obtenir une description continue, à la Cauchy, d'un système newtonien de point-masses ? Quelle est la fiabilité de cette description lorsqu'on étudie des systèmes s'éloignant sensiblement de la continuité apparente, soit pour leur mouvement soit pour leur nature moléculaire ?

Dans l'étude de certains phénomènes, comme par exemple les films superconducteurs, on considère aujourd'hui des applications de la mécanique des milieux continus à l'échelle de quelques pas atomiques (*cf.* [20]). Quel est alors le passage qui permet l'écriture en terme de flux surfacique de quantité de mouvement des quelques actions à distance échangées entre atomes de part et d'autre d'une coupe du film dans son épaisseur ? Quel est le modèle tridimensionnel et comment doit-on s'y prendre pour l'écriture de l'équation d'équilibre du film normalement à son plan (nécessaire, par exemple, pour l'étude des effets du collage du film sur un support ayant un pas atomique différent) ?

A partir de la fin des années 1940 des modèles de matériau non-simples ont été proposés et appliqués en mécanique des fluides et des solides (*cf.* [108, 107, 106]). L'approche générale à ce problème, présentée par exemple par Truesdell et Noll (*cf.* [105]), consiste dans l'écriture d'une loi de comportement de la contrainte qui fait appel à plus d'information que la simple valeur locale du gradient de la transformation. S'il suffit de tenir compte dans cette loi de comportement de la valeur locale des gradients successifs de la transformation, on obtient des modèles de matériaux non-simples.

Les propositions de Cauchy, Kleitz, Levy et de Saint-Venant présentées dans la dernière partie de ce chapitre représentent vraisemblablement les premiers essais dans cette direction. Comme les arguments soulevés dès le premier débat le démontraient, il s'agit d'évaluer la contrainte – un concept typiquement lié aux échanges à travers les surfaces, c'est à dire au contact – dans des conditions qui requièrent la prise en compte des gradients supérieurs au premier du champ de déplacement ou de vitesse à cause, essentiellement, de l'étendue de l'action intermoléculaire. L'opposition de de Saint-Venant à la position même d'un tel problème doit, on imagine, se résoudre dans un processus de limite, qui puisse mettre en évidence dans quelles conditions l'existence du tenseur de contrainte

garde encore un sens bien que les interactions se fassent à des distances non négligeables (dont la longueur caractéristique rentrerait dans le modèle par le biais du second gradient de la transformation). Au delà de la légitimité d'une formulation purement continuiste du problème, la question des rapports de telles théories avec le modèle moléculaire demeure inexplorée.

Une formulation alternative à [105], proposée par Edelen et Laws (*cf.* [33]) et développée aussi par Eringen (*cf.* [34, 36, 35]), se base sur l'écriture d'un résidu non-local dans l'équation d'équilibre de Cauchy, exprimant une force équilibrée interne dont la valeur en un point est une fonctionnelle du champ de déplacement sur l'ensemble du corps. La non-localité de l'action interne devient alors éventuellement encore plus forte que dans le cas des matériaux non-simples de [105] (la relation entre les deux classes de théories a été étudiée dans [17]), mais on doit rechercher la réponse à la même question : dans quelles hypothèses doit-on au moins se placer afin d'assurer l'existence de la contrainte ?

La réponse à ces questions demande un travail de nature théorique, le cadre physique de référence étant toujours essentiellement le même que pour les mécaniciens du début du XIX^e siècle. C'est par l'analyse des questions déjà soulevées à l'époque et parfois oubliées, des démarches suivies et des approximations acceptées que, comme dans le cas des relations de Cauchy présentées dans la deuxième partie de ce chapitre, on peut trouver les directions dans lesquelles il faut creuser pour sortir des réponses.

Bibliographie

- [1] B. R. Andrievskii, P. Yu. Guzenko, and A. A. Fradkov. Control of nonlinear vibrations of mechanical systems via the method of velocity gradient. *Automation and Remote Control*, 57 (4) :456–467, 1996.
- [2] Anonymus. Provisional product information RHEOBAY TP AI 3565* and RHEOBAY TP AI 3566*. Technical report, Bayer AG, Germany, 1994.
- [3] D. H. Arnold. The Mécanique Physique of Siméon Denis Poisson: The Evolution and Isolation in France of his Approach to Physical Theory (1800–1840). VI. Elasticity: The Crystallization of Poisson's Views on the Nature of Matter. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 28 :343–367, 1983.
- [4] E. Benvenuto. *An Introduction to the History of Structural Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin – New York, 1991.
- [5] J. Bernoulli. *Nouvelles pensées sur le système de M. Descartes. Pièces qui ont remporté le prix de l'Académie Royale des Sciences*. Jombert, Paris, 1730.
- [6] J. Bernoulli. *Essai d'une nouvelle physique celeste, servant à expliquer les principaux Phénomènes du Ciel, & en particulier la cause physique de l'inclinaison des Orbites des Planètes per rapport au plan de l'Equateur du Soleil. Pièces qui ont remporté le prix double de l'Académie Royale des Sciences en MDCCXXXIV*. Imprimerie Royale, Paris, 1735.
- [7] P. Biscari and G. Capriz. Optical and statistical anisotropy in nematics. *Rend. Accad. Lincei, Matematica*, 4 :307–313, 1993.
- [8] H. Block and J. P. Kelly. Review Article: Electro-rheology. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 21 :1661–1677, 1988.
- [9] R. Bloodworth and E. Wendt. Material for ER fluids. *Int. J. Modern Phys. B*, 10 (23-24) :2951–2964, 1996.
- [10] O. Bonneau and J. Fréne. Non-linear behavior of a flexible shaft partly supported by a squeeze film damper. *Wear*, 206 :244–250, 1997.
- [11] M. Born and K. Huang. *Dynamical theory of crystal lattices*. Clarendon Press, Oxford, 1954.
- [12] G. Bossis, C. Mathis, Z. Mimouni, and C. Paparoditis. Magnetoviscosity of Micronic Suspensions. *Europhys. Letters*, 11 (2) :133–137, 1990.
- [13] F. Broglia and D. Luminati. Connected Sum of Compact Analytic Hyper-surfaces. *AMPA*, (IV) CLXXIII :203–211, 1997.

- [14] M. C. Calderer and C. Liu. Poiseuille flow of nematic liquid crystals. In The Eringen Symposium dedicated to Pierre-Gilles de Gennes (Pullman, WA, 1998). *IJES*, 38 (9-10) :1007–1022, 2000.
- [15] G. Capriz. Bodies with microstructure. *Riv. Mat. Univ. Parma*, 5 (4) :673–691, 1979.
- [16] G. Capriz. *Continua with microstructure*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [17] G. Capriz and P. Giovine. *Weakly Nonlocal Effects in Mechanics*, pages 37–44. Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlin, Report n.18, 2000.
- [18] A.-L. Cauchy. *Exercices de Mathématiques. 3^e année*. De Bure, Paris, 1828.
- [19] A.-L. Cauchy. Note sur l'équilibre et les mouvements vibratoires des corps solides. *C. R. Acad. Sci. Paris*, XXXII :323–326, 1851.
- [20] P. Cermelli and P. Podio-Guidugli. Modeling deformation effects on T_c in epitaxial films of $\text{La}_{1.9}\text{Sr}_{0.1}\text{CuO}_4$. *Physica C*, 2001.
- [21] J. Clack, R. Stanway, and J. L. Spronston. The electrical transfer in characteristics of electro-rheological fluids in the squeeze-flow mode. *J. Intel. Mater. Sys. Struct.*, 5 :713–722, September 1994.
- [22] E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie des corps déformables*. Hermann, Paris, 1909.
- [23] G. Croci. *Il Palazzo Ducale di Genova*. Ente Palazzo Ducale, Genova, 1996.
- [24] A.-J.-C. Barré de Saint-Venant. Mémoire sur les formules nouvelles pour la solution des problèmes relatifs aux eaux courantes. *Ann. Mines 4^e Série*, t. XX :183–229, 1851.
- [25] A.-J.-C. Barré de Saint-Venant. Note sur les valeurs que prennent les pressions dans un solide élastique isotrope lorsque l'on tient compte des dérivées d'ordre supérieur des déplacements très-petits que leurs points ont éprouvés. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. LXVIII :569–571, 1868.
- [26] A.-J.-C. Barré de Saint-Venant. Rapport sur un Mémoire de M. Maurice Levy, relatif à l'hydrodynamique des liquides homogènes, particulièrement à leur écoulement rectiligne et permanent. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. LXVIII :582–590, 1869.
- [27] A.-J.-C. Barré de Saint-Venant. Rapport sur un Mémoire de M. Kleitz intitulé : « Études sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement, et application à l'hydrodynamique ». *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. LXXIV :426–438, 1872.
- [28] A.-J.-C. Barré de Saint-Venant. Sur l'hydrodynamique des cours d'eau. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. LXXIV :570–577, 649–657, 693–701, 770–774, 1872.
- [29] G. M. T. D'Eleuterio. On the Theory of Gyroelasticity. *J. App. Mech.*, 55 :488–489, 1984.
- [30] G. M. T. D'Eleuterio and P. C. Hughes. Dynamics of Gyroelastic Continua. *J. App. Mech.*, 51 :415–422, 1984.

- [31] A. D. Dimarogonas and A. Kollias. Electrorheological fluid-controlled "smart" journal bearings. *Tribology Transactions*, 35 (4) :611–618, 1992.
- [32] R. S. Dwyer-Joice, W. A. Bullough, and S. Lingard. Elastohydrodynamic performance of unexcited electro-rheological fluids. *Int. J. Modern Phys. B*, 10 (23-24) :3181–3189, 1996.
- [33] D. G. B. Edelen and N. Laws. On the Thermodynamics of Systems with Nonlocality. *Arch. Rat. Mech. Analysis*, 43 :24–44, 1971.
- [34] A. C. Eringen. A unified theory of thermomechanical materials. *Int. J. Engrg. Sci.*, 4 :179–202, 1966.
- [35] A. C. Eringen. Vistas on nonlocal continuum physics. *Int. J. Engrg. Sci.*, 30 :1551–1565, 1992.
- [36] A. C. Eringen and D. G. B. Edelen. On nonlocal elasticity. *Int. J. Engrg. Sci.*, 10 :233–248, 1972.
- [37] L. S. Pontryagin et al. *The mathematical theory of optimal processes*. John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [38] F. E. Filisko. ER V: The Present and the Future. *Int. J. Modern Phys. B*, 10 :v–vii, 1996.
- [39] P. Germain. The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2: Microstructure. *SIAM J. Appl. Math.*, 25(3) :556–575, 1973.
- [40] F. Gilbert. *Description thermo-mécanique de milieux à plusieurs constituants et application aux milieux poreux saturés*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie – Paris VI, 1987.
- [41] G. L. Gulley and R. Tao. Static shear stress of electrorheological fluids. *Phys. Rev. E*, 48 (4) :2744–2751, October 1993.
- [42] G. L. Gulley and R. Tao. Structures of an electrorheological fluid. *Phys. Rev. E*, 56 (4) :4328–4336, October 1997.
- [43] T. C. Halsey. Electrorheological fluids. *Science*, 258 :761–766, October 1992.
- [44] T. C. Halsey, J. E. Martin, and D. Adolf. Rheology of Electrorheological Fluids. *Physical Review Letters*, 68 (10) :1519–1522, March 1992.
- [45] T. C. Halsey and W. Toor. Structure of Electrorheological Fluids. *Physical Review Letters*, 65 :2820–2823, November 1990.
- [46] R. Hill. Generalized constitutive relations for incremental deformation of metal crystals by multislip. *J. Mech. Phys. Solids*, 14 :95–102, 1966.
- [47] R. Hill and J. R. Rice. Constitutive Analysis of Elastic-Plastic Crystals at Arbitrary Strain. *J. Mech. Phys. Solids*, 20 :401–413, 1972.
- [48] M. W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [49] F. Ikazaki, A. Kawai, K. Uchida, T. Kawakami, K. Edamura, K. Sakurai, H. Anzai, and Y. Asako. Mechanisms of electrorheology: the effect of the dielectric property. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 31 :336–347, 1998.
- [50] T. j. Chen, X. Zhang, R. N. Zitter, and R. Tao. Deformation of an electrorheological chain under flow. *J. Appl. Phys.*, 74 (2) :942–944, July 1993.
- [51] S. Y. Jung and S. b. Choi. Analysis of a short squeeze-flow damper operating with electrorheological fluids. *Tribology Transactions*, 38 (4) :857–862, 1995.

- [52] Kleitz. Sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement, avec application à l'hydrodynamique. (Extrait). *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. LXIII :988-991, 1866.
- [53] E. V. Korobko. Some Aspects of Electrorheology. *J. Intel. Mater. Sys. Struct.*, 3 :268-295, April 1992.
- [54] E. Kröner. Allgemeine kontinuumstheorie der versetzungen und eigenspannungen. *Arch. Rat. Mech. Analysis*, 4 :273-334, 1960.
- [55] M. G. Lamé. *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. Bachelier, Paris, 1852.
- [56] T. H. Leek, S. Lingard, R. J. Atkin, and W. A. Bullough. An experimental investigation of the flow of an electro-rheological fluid in a Rayleigh step bearing. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 26 :1592-1600, 1993.
- [57] C. Lineau. *Analyse expérimentale de la déformation plastique d'un polycristal d'acier : comparaison avec les simulations de modèles polycristallins*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- [58] S. Lingard, W. A. Bullogh, and L. S. Ho. Hydrodynamic pressure generation with an electrorheological fluid. *Wear*, 142 :373-381, 1991.
- [59] S. Lingard, W. A. Bullogh, and W. M. Shek. Tribological performance of an electrorheological fluid. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 22 :1639-1645, 1989.
- [60] J.-L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris, 1968.
- [61] A. E. H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover Publications, New York, 1927.
- [62] J. Mandel. Généralisation de la théorie de la plasticité de W. T. Koiter. *Int. J. Solids Structures*, 1 :273-295, 1965.
- [63] J. Mandel. *Plasticité classique et viscoplasticité. International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures - No. 97*. Springer-Verlag, Wien-New York, 1972.
- [64] J. Mandel. Définition d'un repère privilégié pour l'étude des transformations anélastiques du polycristal. *J. Méc. Th. Appl.*, 1 (1) :7-23, 1982.
- [65] J. E. McGuire. Body and void and Newton's De Mundi Systemate: Some New Sources. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 3 :206-248, 1966-67.
- [66] G. J. Monkman. The electrorheological effect under compressive stress. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 28 :588-593, 1995.
- [67] S. Morishita and Y. K. An. On dynamic characteristics of ER fluid squeeze film damper. *JSME Int. J.*, 39 (4) :702-707, December 1996.
- [68] S. Morishita and J. Mitsui. Controllable squeeze film damper (an application of electro-rheological fluid). *J. Vib. Acoustics*, 114 :354-357, July 1992.
- [69] S. Morishita and T. Ura. ER fluid applications to vibration control devices and an adaptive neural-net controller. *J. Intel. Mater. Sys. Struct.*, 4 :366-372, July 1993.
- [70] C.-L.-M.-H. Navier. *Resumé des Leçons données à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*. Dunod, Paris, 1864.

- [71] P. F. Neményi. The Main Concepts and Ideas of Fluid Dynamics in their Historical Development. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 2 :52–86, 1962-66.
- [72] I. Newton. *Optics, or, a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light*. 4th ed., London, 1730.
- [73] I. Newton. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Barrillot, Genève, 1742.
- [74] I. Newton. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Classici della Scienza. UTET, Torino, 1989.
- [75] J. L. Nikolajsen and M. S. Hoque. An electroviscous damper for rotor applications. *J. Vib. Acoustics*, 112 :440–443, October 1990.
- [76] P. G. Nikolakopoulos and C. A. Papadopoulos. High speed journal bearings, lubricated with electrorheological fluids. An experimental investigation. *Int. J. Modern Phys. B*, 10 (23-24) :3045–3055, 1996.
- [77] P. G. Nikolakopoulos and C. A. Papadopoulos. Controllable Misaligned Journal Bearings Lubricated with Smart Fluids. *J. Intel. Mater. Sys. Struct.*, 8 :125–137, February 1997.
- [78] P. G. Nikolakopoulos and C. A. Papadopoulos. Controllable high speed journal bearings, lubricated with electrorheological fluids. An analytical and experimental approach. *Tribology International*, 31 (5) :225–234, 1998.
- [79] W. Noll. A New Mathematical Theory of Simple Materials. *Arch. Rat. Mech. Analysis*, 48 :1–50, 1972.
- [80] W. Noll. *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics, selected papers by W. Noll*. Springer-Verlag, New York, 1974.
- [81] U.S. Panel on Structural Control Research. Structural control: past, present, and future. *JEM*, 123 (9) :Special Issue, 1997.
- [82] C. Osti, C. Oliva, F. Perego, G. Spalla, G. Croci, and M. Cerone. *Palazzo Ducale*. Editer, Roma, 1988.
- [83] W. C. Park, S. B. Choi, C. C. Cheong, M. S. Suh, and M. S. Yeo. Boundary lubrication characteristics of silica-based electro-rheological fluids. *J. Intel. Mater. Sys. Struct.*, 7 :511–516, September 1996.
- [84] H. Poincaré. *Leçons sur la Théorie de l'Elasticité*. Georges Carré, Paris, 1892.
- [85] S.-D. Poisson. Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques [...] Lu à l'Académie, le 14 avril 1828. *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, VIII :357–627, 1829.
- [86] S.-D. Poisson. Mémoire sur les Équations générales de l'Équilibre et du Mouvement des Corps solides élastiques et des Fluides ; Lu à l'Académie des sciences, le 12 Octobre 1829. *Journal de l'Ecole polytechnique*, 13 (XX^e cahier) :1–174, 1831.
- [87] S.-D. Poisson. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps cristallisés [...] Lu à l'Académie, le 28 octobre 1839. *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, XVIII :1–152, 1842.
- [88] R. J. Randall and W. F. Tsang. Use of electro-rheological fluids for adaptive vibration isolation. In *Proc. 1st European Conf. on Smart Structures and Materials, Glasgow*, pages 399–402, 1992.

- [89] J. R. Rice. Inelastic Constitutive Relations for Solids: An Internal-Variable Theory and Its Applications to Metal Plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 19 :433–455, 1971.
- [90] Y. M. Shkel and D. J. Klingenberg. A continuum approach to electrorheology. *J. Rheol.*, 43 (5) :1307–1322, September/October 1999.
- [91] J. B. Spencer. Boscovich's Theory and its Relation to Faraday's Researches: An Analytic Approach. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 4 :184–202, 1967-68.
- [92] J. L. Sproston, A. K. El Wahed, E. W. Williams, and R. Stanway. A comparison of the performance of ER fluids in squeeze. *Int. J. Modern Phys. B*, 10 (23-24) :3081–3091, 1996.
- [93] J. M. Sun and R. Tao. Viscosity of a one-component polarizable fluid. *Phys. Rev. E*, 52 (1) :813–818, July 1995.
- [94] J. M. Sun and R. Tao. Shear flow of a one-component polarizable fluid in a strong electric field. *Phys. Rev. E*, 53 (4) :3732–3737, April 1996.
- [95] Ph. Tamagny. *Modélisation des milieux à microstructure : approches par la méthode des puissances virtuelles*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1996.
- [96] R. Tao. Order parameters and phase transitions in electrorheological fluids. *Int. J. Modern Phys. B*, 6 (15-16) :2635–2649, 1992.
- [97] R. Tao. Electric-field-induced phase transition in electrorheological fluids. *Phys. Rev. E*, 47 (1) :423–426, January 1993.
- [98] R. Tao and Q. Jiang. Structural transition of an electrorheological and magnetorheological fluid. *Phys. Rev. E*, 57 (5) :5761–5765, May 1998.
- [99] R. Tao and J. M. Sun. Ground state of electrorheological fluids from Monte Carlo simulations. *Phys. Rev. A*, 44 (10) :R6181–R6184, November 1991.
- [100] R. Tao and J. M. Sun. Three-dimensional structure of induced electrorheological solid. *Physical Review Letters*, 67 (3) :398–401, July 1991.
- [101] J. A. Tichy. Behavior of a squeeze film damper with an electrorheological fluid. *Tribology Transactions*, 36 (1) :127–133, 1993.
- [102] C. A. Truesdell. Early Kinetic Theories of Gases. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 15 :1–66, 1975-76.
- [103] C. A. Truesdell. *A first course in rational continuum mechanics*. Academic Press, 1977.
- [104] C. A. Truesdell and R. G. Muncaster. *Fundamentals of Maxwell's kinetic theory of a simple monoatomic gas*. Academic Press, New York–London–Toronto–Sydney–San Francisco, 1980.
- [105] C. A. Truesdell and W. Noll. *Encyclopedia of Physics. S. Flügge Ed. Vol. Vol. III/3 "The non-linear field theories of mechanics"*, chapter The non-linear field theories of mechanics. Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [106] M. Viguier. La couche-limite de Prandtl avec d'importants gradients de vitesses. *C. R. Acad. Sci. Paris*, CCXXV :45–46, 1947.
- [107] M. Viguier. L'écoulement d'un fluide visqueux avec gradients de température et gradients de vitesse élevés. *C. R. Acad. Sci. Paris*, CCXXIV :1048–1050, 1947.

- [108] M. Viguier. Les équations de la couche limite dans le cas de gradients de vitesse élevés. *C. R. Acad. Sci. Paris*, CCXXIV :713-714, 1947.
- [109] W. Voigt. L'état actuel de nos connaissances sur l'élasticité des cristaux. In *Congrès international de Physique — Société française de Physique*. Gauthier-Villars, Paris, 1900.
- [110] K. W. Wang, Y. S. Kim, and D. B. Shea. Structural vibration control via electrorheological-fluid-based actuators with adaptive viscous and frictional damping. *J. Sound Vibration*, 177 (2) :227-237, 1994.
- [111] P. K. C. Wang. Control of Distributed Parameter Systems. *J. Mech. Control*, pages 75-172, 1964.
- [112] Z. Wang, Z. Lin, and H. Fang. Dynamic response times of electrorheological fluids in steady shear. *J. Appl. Phys.*, 83 (2) :1125-1131, 1998.
- [113] K. D. Weiss and J. D. Carlson. Review: Material Aspects of Electrorheological Systems. *J. Intel. Mater. Sys. Struct.*, 4 :13-34, January 1993.
- [114] E. Wendt and K. W. Büsing. A new type of hydraulic actuator using electrorheological fluids. Technical report, Bayer AG, Leverkusen, Germany.
- [115] E. Wendt and K. W. Büsing. Properties of a new generation of non-abrasive and water free electrorheological fluids. Technical report, Bayer AG, Leverkusen, Germany.
- [116] A. S. Wineman and K. R. Rajagopal. On constitutive equations for electrorheological materials. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 7 :1-22, 1995.
- [117] W. Wolthers, D. van den Ende, M. H. G. Duits, and J. Mellema. The viscosity and sedimentation of aggregating colloidal dispersion in a Couette flow. *J. Rheol.*, 40 (1) :55-67, January/February 1996.

