

Consiglio Nazionale delle Ricerche
ISTI – Istituto di Scienza e Tecnologie della Informazione

**LA TRASMISSIONE NUMERICA DEI DATI CON
LA MODULAZIONE OFDM IN FREQUENZA**

Bertini Graziano, Di Salvo Vincenzo Giovanni

B4 – 15

Luglio 2003

PISA

LA TRASMISSIONE NUMERICA DEI DATI CON
LA MODULAZIONE OFDM IN FREQUENZA

Bertini Graziano*, Di Salvo Vincenzo Giovanni**

- * ISTI-CNR
- ** Associato alla Ricerca

INDICE

Sommario	3
1. Introduzione	3
2. Teoria	4
3. La modulazione OFDM nel dominio della frequenza	8
4. Un modem OFDM per la trasmissione numerica dei dati	9
5. Conclusioni	16
Bibliografia	17
Ringraziamenti	17

SOMMARIO

La presente nota tecnica richiama le caratteristiche fondamentali sulle modulazioni numeriche impulsive ponendo maggiore enfasi alla modulazione PAM-OFDM che attualmente è la più diffusa nel settore industriale relativamente alla trasmissione numerica dei dati.

Un aspetto interessante, sul quale si è ritenuto opportuno soffermarsi, è la trattazione di questa modulazione nel dominio della frequenza. Da una esperienze di collaborazione con ditte del settore, infatti, gli autori hanno potuto verificare che l'uso della modulazione PAM-OFDM nel dominio della frequenza, può essere una strada elegante da seguire, rispetto a quella duale nel dominio del tempo, quando sia richiesta una banda rigorosamente limitata e una semplificazione dell'algoritmo di trasmissione.

Come caso applicativo, viene presentata la sintesi in frequenza dello stadio di trasmissione di un modem PAM-OFDM.

1. Introduzione.

Nello sviluppo dei sistemi di telecomunicazione l'attuale tendenza della tecnologia è quella di ricorrere a modulazioni numeriche in grado di garantire la robustezza della comunicazione. La degradazione della qualità del segnale in ricezione dipende da fattori di vario tipo. Il rumore introdotto dal canale di comunicazione nonché quello proprio della componentistica elettronica del sistema sono la principale causa di una errata decodifica della informazione trasmessa. Ma il rumore di canale non è la sola causa di degradazione (stocastica) della qualità del segnale ricevuto. Nelle comunicazioni radiomobili, come pure nelle trasmissioni sottomarine, la propagazione del segnale trasmesso avviene attraverso molti cammini (multipath) generati dalle riflessioni che esso subisce in prossimità di ostacoli di varia natura (Fig. 1). Fondamentalmente la qualità del segnale risulta degradata per varie cause: attenuazione dovuta all'assorbimento di canale, attenuazione quando i diversi cammini interferiscono distruttivamente; il fatto poi che i diversi cammini non siano allineati nel tempo è altresì causa di interferenza intersimbolica.

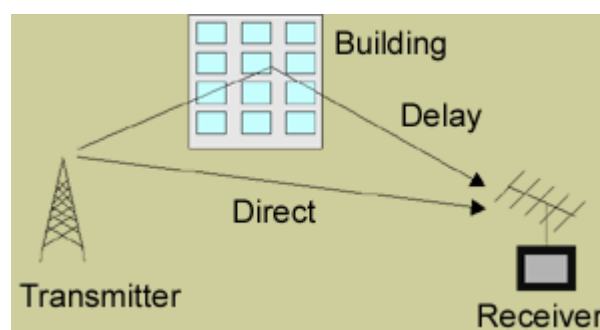


Fig. 1 – Canale multipath.

Per far fronte ai problemi suddetti nell'ambito delle Trasmissione Numeriche è stata messa a punto la Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM), una strategia di modulazione in grado di garantire affidabilità alla trasmissione dell'informazione in presenza di canali multipath.

Scopo di questo report è quello di illustrare la trasmissione numerica dei dati facendo uso della caratterizzazione in frequenza della modulazione OFDM e mostrare, in alternativa alla duale rappresentazione nel dominio del tempo, quali possibilità può offrire.

Come caso applicativo di studio viene considerato lo sviluppo dello stadio di trasmissione di un modem nella banda degli ultrasuoni.

2. Teoria.

OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) è una metodologia che fa parte delle modulazioni numeriche impulsive. Le peculiarità offerte da questa forma di modulazione del segnale trasmesso ne hanno promosso l'uso nel broadcasting televisivo digitale terrestre e nelle linee di comunicazione telefonica ad alta velocità quali l'ADSL. Le modulazioni numeriche impulsive sono un tipo di modulazione in cui la portante è costituita da un treno di impulsi e la modulante è di tipo analogico. Esse si dividono in **PAM** (*Pulse Amplitude Modulation = modulazione ad ampiezza di impulsi*); **PWM** (*Pulse Width Modulation = modulazione a larghezza di impulsi*); **PPM** (*Pulse Position Modulation = modulazione a posizione di impulsi*).

Un segnale modulato in ampiezza è rappresentato dalla seguente espressione matematica:

$$s_{RF}(t) = s(t) \cdot \cos(2\pi f_c t); \quad (1.2)$$

f_c è la frequenza della portante, $s(t)$ è il segnale modulante e il pedice RF ricorda che il segnale modulato è a radio-frequenza. Facendo uso della rappresentazione complessa dei segnali passa-banda (involuppo complesso) la precedente equazione può scriversi

$$s_{RF}(t) = \text{Re} \{ s(t) * e^{j2\pi f_c t} \} \quad (2.2)$$

in cui $s(t)$ rappresenta l'involuppo complesso, ovvero l'equivalente in banda-base di $s_{RF}(t)$. Nella modulazione **PAM** il segnale $s(t)$ assume la seguente espressione:

$$s(t) = \sum_i c_i p(t - iT); \quad (3.2)$$

I simboli c_i , che modulano in ampiezza la forma d'onda analogica $p(t)$, da scegliere in modo opportuno, prendono il nome di *simboli di modulazione*.

I simboli c_i caratterizzano una modulazione numerica.

Sono generalmente numeri complessi

$$c_i = a_i + b_i = |c_i| e^{j\varphi}$$

e appartengono ad un alfabeto \mathbf{C} che prende il nome di *costellazione* del segnale [1].

Le costellazioni più usate sono la costellazione **M-PSK** (Phase Shift Keying), nella quale M simboli sono disposti su una circonferenza di raggio unitario e a distanza costante tra loro secondo la legge (Fig. 2a):

$$\mathbf{A} = \{ e^{j\psi}; \psi = 0, 2\pi/M, \dots, 2\pi(M-1)/M \}; \quad (4.2)$$

e la costellazione **M-QAM** (Quadrature Amplitude Modulation), nella quale M simboli sono disposti sul piano complesso secondo la legge (Fig. 2b):

$$\mathbf{A} = \{ \pm 1, \dots, \pm(\sqrt{M} - 1) \}. \quad (5.2)$$

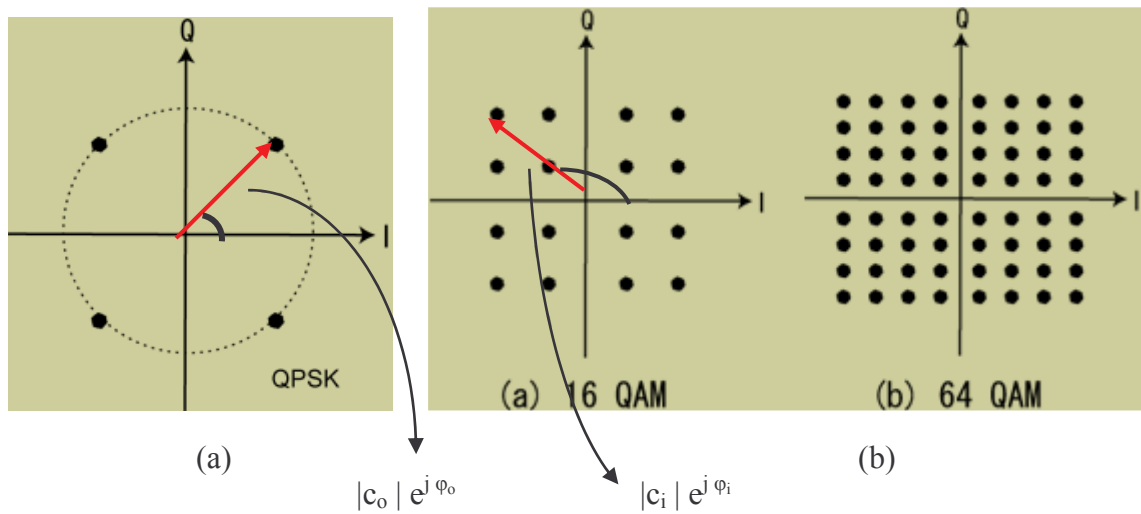


Fig. 2 – I tipi di costellazione più usati.

Un segnale PAM del tipo (3.2) è dunque costituito da una sovrapposizione di M segnali impulsivi $c_i p(t - iT) = |c_i| e^{j\phi_i} p(t - iT)$, $i = 0, 1, \dots, M-1$ (Fig.2). Generalmente si assume $M = 2^m$ di modo che ciascun segnale della costellazione possa essere utilizzato per trasmettere m bit di informazione.

Tenendo conto della natura complessa dei simboli l'espressione (2.2) di un segnale modulato può ottenersi sostituendo la (3.2) nella (2.2):

$$s_{RF}(t) = \text{Re} \left\{ \sum_i |c_i| e^{j\phi_i} p(t - iT) e^{j2\pi f_c t} \right\}. \quad (6.2)$$

La precedente equazione viene implementata secondo lo schema a blocchi di Fig.3.

Il codificatore, sempre presente nei sistemi numerici di comunicazione, provvede a modificare la ridondanza del segnale allo scopo di rendere più robusta la comunicazione in termini di prestazioni (probabilità di errore).

Il blocco di *mappa* si preoccupa di caratterizzare i bit di informazione secondo una delle costellazioni menzionate.

L'interpretazione della (6.2) è abbastanza semplice. Sia $\underline{u} = \{ u_i \}$ la sequenza di bit di informazione da trasmettere. La sequenza viene suddivisa in frame di informazione \underline{v} di M bit ciascuno $\underline{v} = \{ v_j ; j = 1, 2, \dots, M \}$. A ciascun frame viene associato un simbolo della costellazione. Ciascun simbolo modula un impulso $p(t)$ di forma opportuna. Ciascun segnale così ottenuto viene trasmesso sul canale utilizzando il coseno e il seno di una stessa portante a frequenza f_c . Le singole forme d'onda vengono quindi sommate tutte insieme.

La modulazione PAM M_N -OFDM è una modulazione multi-portante. Per trasmettere un segnale numerico si utilizzano N modulazioni impulsive di tipo PAM M -PSK o di tipo PAM M -QAM su altrettante portanti equispaziate ed ortogonali tra loro:

$$f_n = f_0 + n \cdot \Delta \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Il pedice n si riferisce alla n-esima portante.

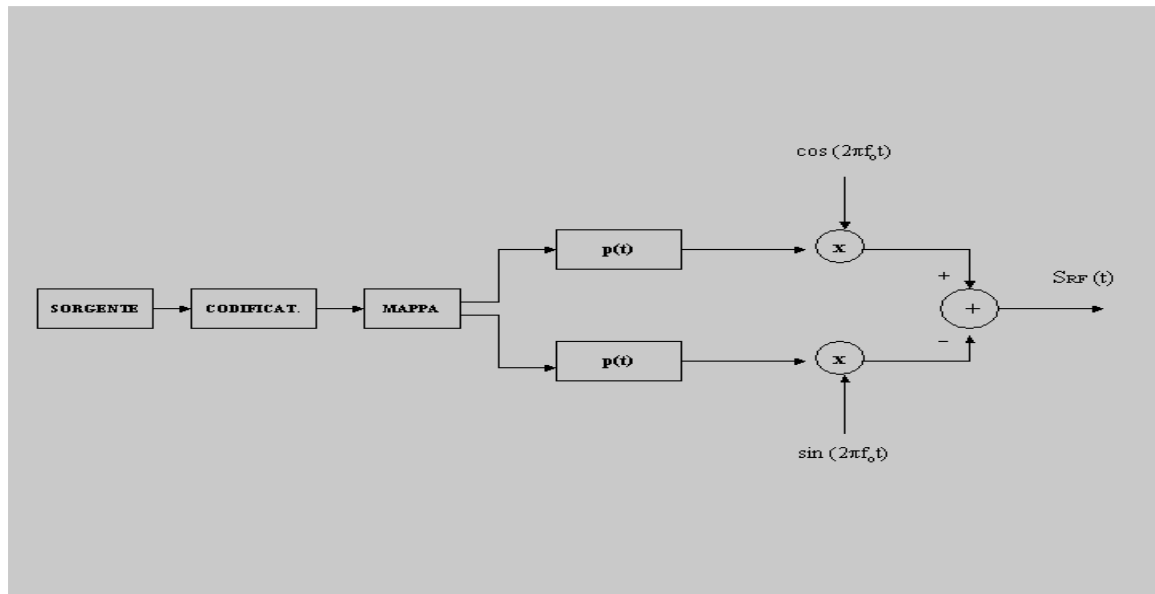


Fig. 3 – Generazione di $s_{RF}(t)$.

L'involuppo complesso di una modulazione M_N -OFDM può dunque scriversi come:

$$s(t) = \sum_{n=0}^N \left\{ \sum_i c_{i,n} e^{j(2\pi f_n t)} p(t - iT) \right\}. \quad (7.2)$$

Portanti diverse, altresì, possono essere associate a costellazioni contenenti anche un diverso numero di punti.

Alla luce di quanto detto l'interpretazione della (7.2) è abbastanza semplice. Si indichi con $\underline{u} = \{ u_i \}$ la sequenza di bit di informazione da trasmettere. La sequenza viene suddivisa in frame di informazione \underline{w}_k di K bit ciascuno con

$$K = \sum_{n=1}^N M_n \quad (8.2)$$

Il frame \underline{w}_k viene dunque partizionato in sottoframe $\underline{v}_{n,k}$ di M_n bit ciascuno (il primo pedice si riferisce alla portante, il secondo è l'indice temporale). A ciascun sottoframe $\underline{v}_{n,k}$ viene associato il corrispondente punto della costellazione M_N -OFDM. Ciascuno di questi punti modula un impulso $p(t)$ di forma opportuna¹. Ciascun segnale così ottenuto

¹ Si osservi come, alla luce dell'interpretazione sistemistica della (7.2), il filtro $p(t)$ che appare nella (3.2) interpreta la risposta impulsiva del filtro di trasmissione. Usualmente, in presenza di canale ideale, esso viene sagomato come una funzione di Nyquist, del tipo a radice di coseno rialzato. Questo risultato deriva dal fatto che nel ricevitore a massima verosimiglianza, generalmente usato nelle applicazioni di trasmissione numerica, per minimizzare la probabilità di errore dei simboli ricevuti, il filtro adattato in ingresso deve essere sagomato come un coseno rialzato.

viene trasmesso sul canale utilizzando il coseno e il seno della corrispondente portante a frequenza f_n . Le singole forme d'onda vengono quindi sommate tutte insieme.

Esempio. Si consideri la costellazione 4_2 -OFDM generata da due costellazioni 4-QAM come mostrato in fig. 4. Sia $\underline{u} = \{ 011000111000100111000110 \}$ la sequenza dei bit di informazione da trasmettere.
 In fig. 5 sono rappresentati i frame \underline{w}_k di $K = 4$ bit di informazione e i sottoframe \underline{v}_{nk} di $n = 2$ bit ciascuno.

Fig. 4 – costellazione 4_2 -OFDM. Fig. 5 – sequenza di informazione e sottoframe.

La peculiarità della costellazione OFDM sta nel fatto che è possibile esprimere il segnale ad essa associato mediante l'espressione della Trasformata Tempo-Discreta di Fourier (DFT). Questo aspetto è una delle caratteristiche salienti della modulazione OFDM perché la rende facilmente programmabile mediante algoritmi di calcolo veloce (Fast Fourier Transform).

Per rendersi conto di ciò si consideri l'espressione (7.2) dell'involuppo complesso del segnale OFDM

$$s(t) = \sum_{n=0}^N \left\{ \sum_i c_{i,n} e^{j(2\pi f_n t)} p(t - iT) \right\} .$$

Si considerino i campioni di segnale agli istanti di segnalazione $T_s = T/N$, essendo T il periodo di campionamento. Ricordando che $f_n = n/T$ risulta

$$s(k) = s(kT_s) = s(kT/N) = \sum_{n=0}^N \left\{ \sum_i c_{i,n} e^{j(2\pi nkT/NT)} p(kT/N - iT) \right\} =$$

$$\sum_i p(kT/N - iT) \sum_{n=0}^N c_{i,n} e^{j(2\pi nk/N)} =$$

$$\sum_i p(kT/N - iT) * \text{IDFT}(c_{i,n}) \quad (9.2)$$

che è quanto si voleva dimostrare.

3. La modulazione PAM OFDM nel dominio della frequenza.

Consideriamo l'espressione (9.2), riscritta di seguito per semplicità.

$$s(k) = \sum_i p(kT/N - iT) * \text{IDFT}(c_{i,n})$$

Applicando m.a.m. la Trasformata Tempo-Discreta di Fourier si ottiene

$$\mathbf{S}(m) = \sum_i \mathbf{P}(m) e^{-j\theta} \otimes c_{i,n} \quad (1.3)$$

dove $\theta = 2\pi mi/N$ e il simbolo \otimes indica l'operatore di convoluzione.

Si osservi dunque quanto segue: poiché i simboli $c_{i,n}$ sono Delta di Kronecker

$$\mathbf{P}(m) e^{-j\theta} \otimes c_{i,n} = c_{i,n} * \mathbf{P}(i) e^{-j\theta} \quad (2.3)$$

Sostituendo la (2.3) nella (1.3) risulta dunque:

$$\mathbf{S}(m) = \sum_i c_{i,n} * \mathbf{P}(i) e^{-j\theta(i)} \quad (1.3)$$

L'andamento dello spettro di in segnale modulato **OFDM** è raffigurato in fig. 6.

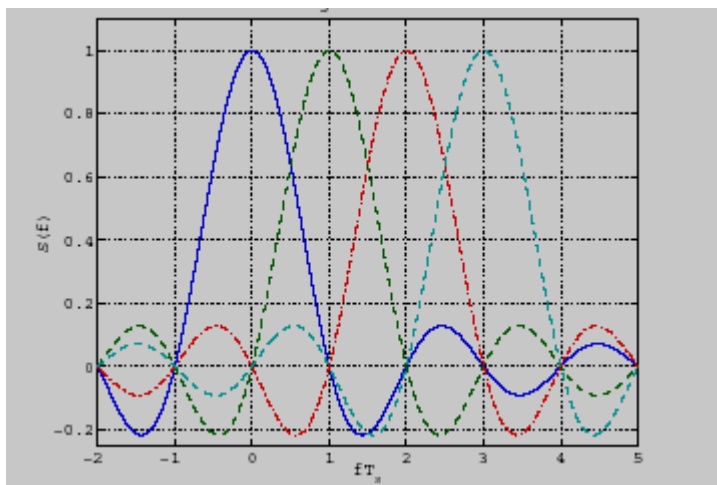


Fig. 6 – Spettro OFDM.

4. Un Modem OFDM per la trasmissione dei dati su canale multipath.

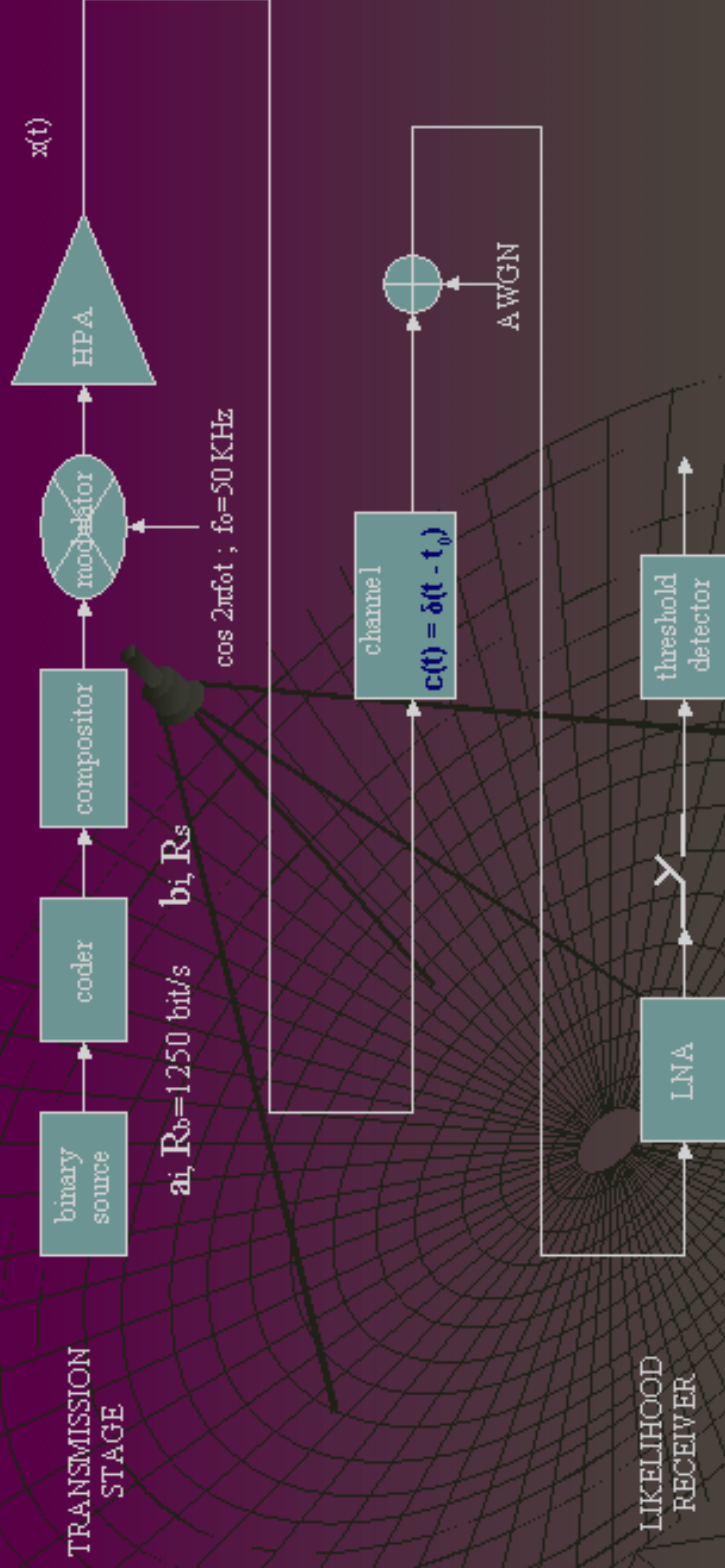
In questo paragrafo viene presa in considerazione la sintesi dello stadio di trasmissione di un modem basato sulla tecnologia OFDM, progetto sviluppato per Sielco srl (SP), una azienda di progettazione di dispositivi di acustica sottomarina.

Inizialmente viene illustrata la struttura di principio del sistema. Questa permetterà di capire quale sia la morfologia del segnale da trasmettere. Sulla base di questo dato diventa così possibile strutturare un sistema numerico di trasmissione dei dati utilizzando la modulazione OFDM discussa. Infine verrà presa in considerazione la duale interpretazione nel dominio della frequenza.

Le verifiche sono state effettuate su DSP utilizzando la scheda madre EZ-LITE 21065L della Analog Devices e su piattaforma software VISUAL-DSP++ , vs3.0 (<http://www.analog.com>).

La descrizione dello sviluppo del modem viene mostrata nel seguito tramite delle slides ppt già utilizzate per una presentazione sintetica del progetto.

STRUTTURA DI PRINCIPIO



IL CODIFICATORE

IL CODIFICATORE OPERA SECONDO LA SEGUENTE LEGGE:

$$a_i = 0 \rightarrow b_i = 0101010101010101$$

$$a_i = 1 \rightarrow b_i = 1010101010101010$$

16 baud



I simboli sono massimamente distanti secondo Hamming.

$$R_s = 16 * R_b = 20000 \text{ baud/sec}$$

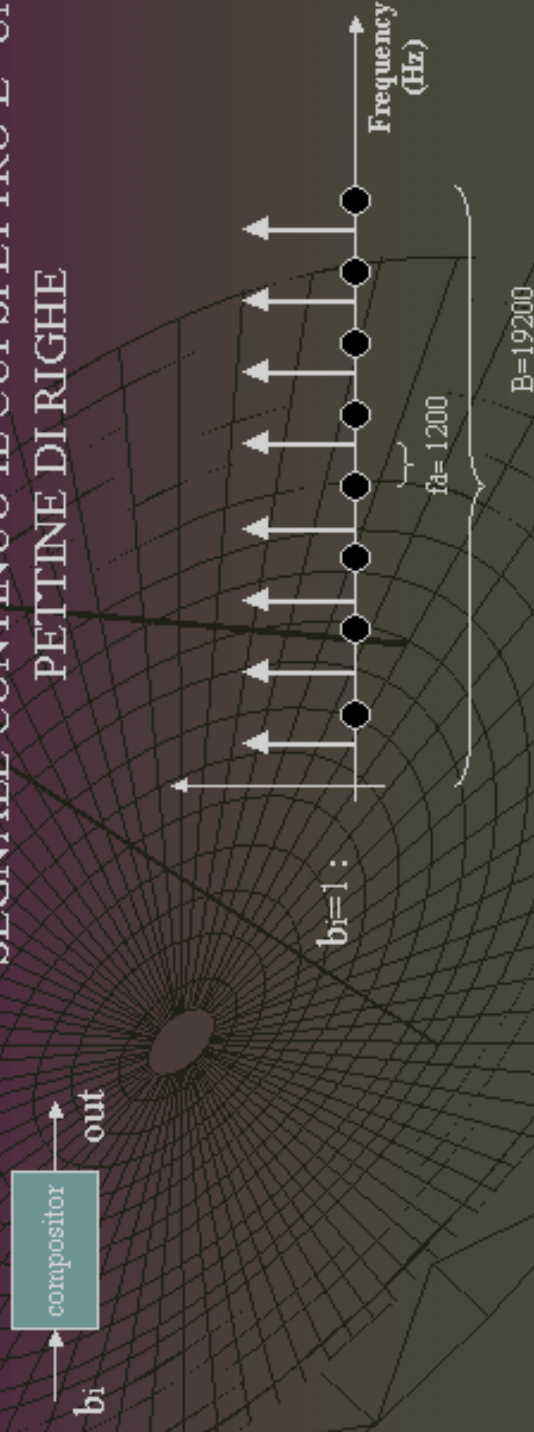
where: $R_b = 1/T_b$: bit/rate (bit) $\Rightarrow T_b = 800 \mu\text{sec}$.

$$R_s = 1/T_s$$
 : signalling rate (baud) $\Rightarrow T_s = 50 \mu\text{sec}$.

IL COMPOSITORE

IL COMPOSITORE MOLTIPLICA OGNI BOUD
DI INGRESSO PER UN SEGNALE
SINUSOIDALE

IL SEGNALE COMPOSITO IN USCITA E' UN
SEGNALE CONTINUO IL CUI SPETTRO E' UN
PETTINE DI RIGHE



LA MODULAZIONE OFDM (I)

$$x(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} b_k^{(m)} e^{j2\pi[f_0 - 15f_a + (2k)f_a]t} p(t - mT_b) \right\}$$

$$x(t) = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{x}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right\} \quad \text{© fo}$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k^{(m)} e^{j2\pi[(2k)f_a - (N-1)f_a]t} p(t - mT_b)$$

RICORRENDO ALLA MODULAZIONE OFDM DALLE PRECEDENTI EQUAZIONI SI OTTIENE:

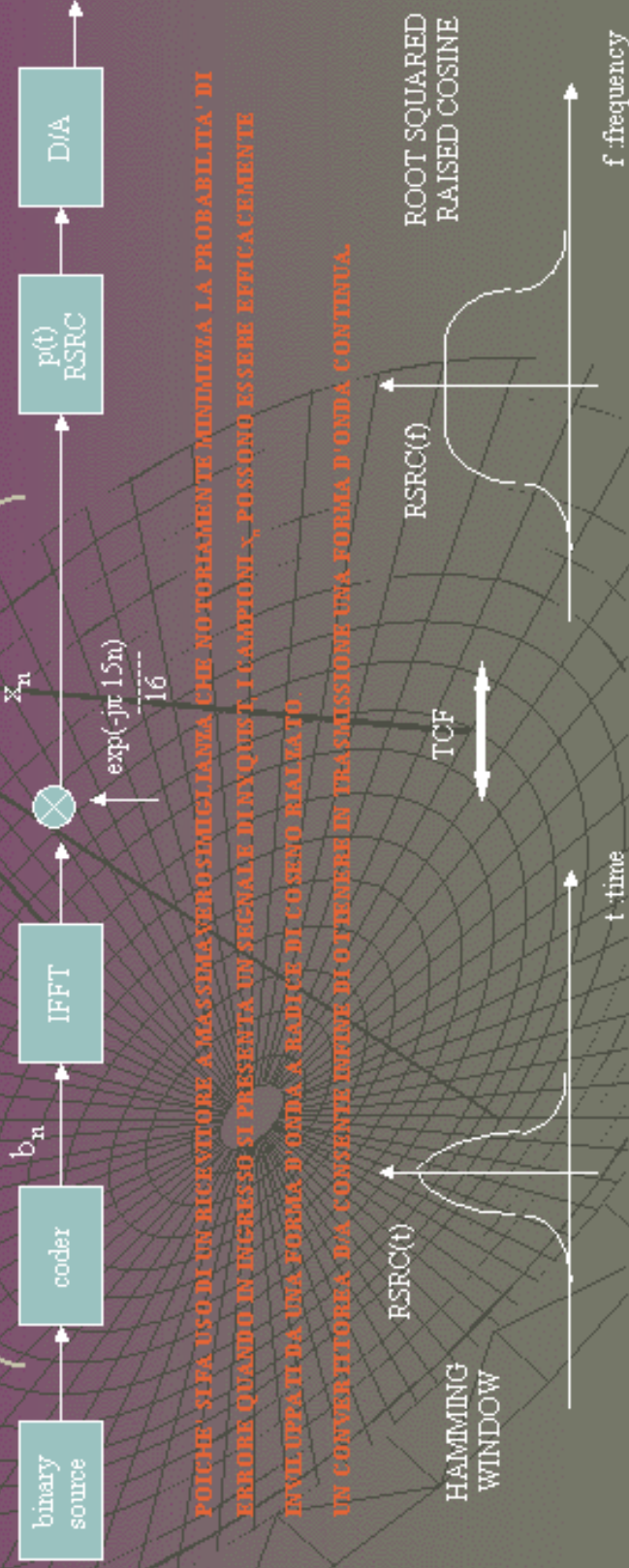
$$\tilde{x}_n^{(m)} = e^{-j\pi \frac{N-1}{N} n} \sum_{k=0}^{N-1} a_k^{(m)} e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

$$\left\{ \tilde{x}_n^{(m)} \right\}_{n=0}^{N-1} =$$

$$\left\{ e^{-j\pi \frac{N-1}{N} n} \right\}_{n=0}^{N-1} \cdot N \cdot \operatorname{IDFT} \left\{ b_k^{(m)} \right\}_{k=0}^{N-1}$$

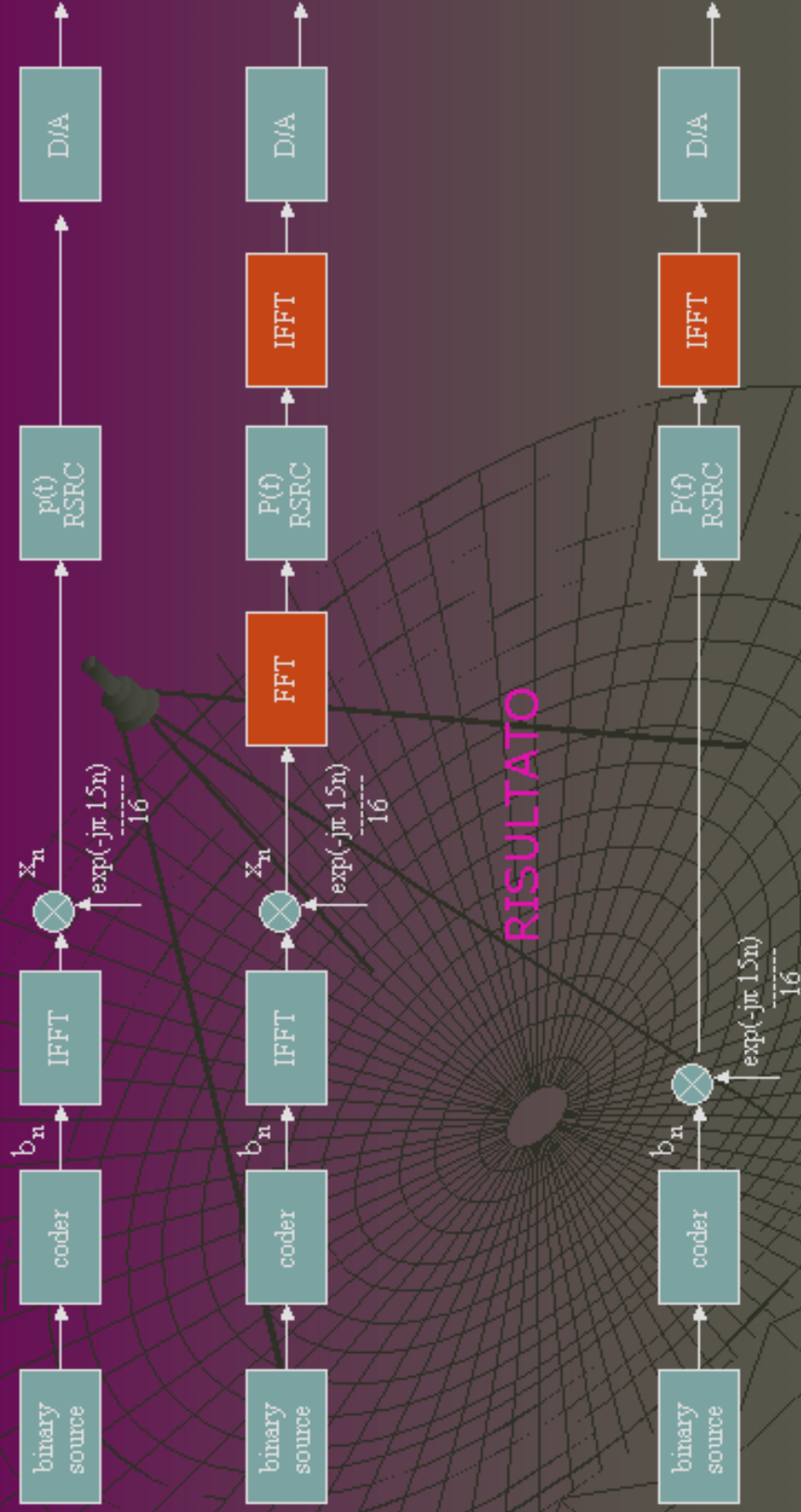
LA MODULAZIONE OFDM (II)

$$\left\{ x_n^{(m)} \right\}_{n=0}^{N-1} = \left\{ e^{-j\pi \frac{N-1}{N} n} \right\}_{n=0}^{N-1} \cdot N \cdot \text{IDFT} \left\{ b_k^{(m)} \right\}_{k=0}^{M-1}$$



POICHE' SIA' UNO DEI RICEVITORI A MASSIMA VEROSIMILIANZA CHE NOTTAMENTE MINIMIZZA LA PROBABILITA' DI ERRORE QUANDO IN INGRESSO SI PRESENTA UN SEGNALE D'INQUIETI I CAMPIONI x_n POSSONO ESSERE EFFICACEMENTE INVOLUPPATI DA UNA FORMA D'ONDA A RADICE DI COSENO REALIZATO. UN CONVERTITORE D/A CONSENTE INFINE DI OTTENERE IN TRASMISSIONE UNA FORMA D'ONDA CONTINUA.

L'INTERPRETAZIONE IN FREQUENZA



5. Conclusioni.

La soluzione in frequenza mostra alcune caratteristiche, rispetto a quella duale nel tempo, che in alcune applicazioni potrebbero risultare utili.

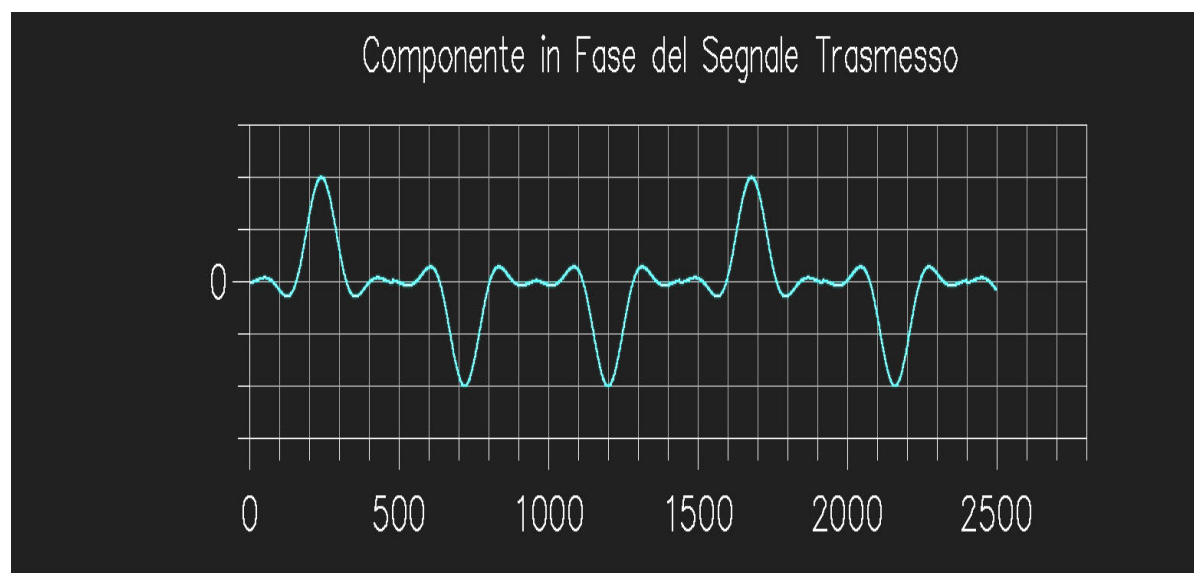
Si faccia riferimento all'ultima slide.

In primo luogo c'è da osservare che, operando nel tempo, la realizzazione del filtro di trasmissione $p(t)$ richiede due passaggi. Per poter associare a ciascun simbolo x_n un impulso a radice di coseno rialzato, infatti, si rende necessaria una preventiva operazione di *oversampling* e il successivo filtraggio con un filtro FIR a radice di coseno rialzato, con conseguenti vincoli temporali più stringenti. Il convertitore D/A a valle del filtro FIR dovrà tenere conto di questo nuovo bit-rate.

Nella realizzazione in frequenza, al contrario, a ciascun boud è possibile associare semplicemente una tabella di valori che interpolano l'andamento di $P(f)$. Anche in questo caso il convertitore D/A dovrà essere alimentato con un bit-rate che tenga conto del numero di campioni di cui è costituita la tabella.

In secondo luogo si osservi che, operando nel tempo, a causa dell'aritmetica finita dei calcolatori, il filtro di trasmissione $p(t)$ risulta inevitabilmente troncato, con conseguente ampliamento della banda. Questo problema non sussiste operando in frequenza, essendo lo spettro rigorosamente limitato in banda.

Le verifiche sono state effettuate su DSP utilizzando la scheda madre EZ-LITE 21065L della Analog Devices e su piattaforma software VISUAL-DSP++ , vs3.0. La Fig. 7 mostra la componente in fase dell'involuppo complesso del segnale trasmesso graficata con il tool *plot* che simula l'uscita analogica in uscita dal D/A .



* * *

Bibliografia

1. Signal & Systems – Oppenheim, Willis. Prentice Hall
2. Trasmissione Numerica – U. Mengali, M. Morelli. Mc.Grow Hill. 2001
3. Implementation and Performance Evaluation of an OFDM Modem With Variations in Cyclic Prefix Length and Channel Coding for Different Channels - Indira Rajagopal, Joydeep Acharya, Madhavi V Ratnagiri, Sumathi Gopal. Course: Communication Theory (ECE 545); Rutgers University. Professor: Dr. Predrag Spasojevic.
4. Multicarrier vs. Monocarrier Modulation Techniques: An Introduction to OFDM - Jose M. Paez-Borrallo. Department: Señales, Sistemas y Radiocomunicaciones. ETSIT - Universidad Politécnica de Madrid. 2000.
5. OFDM as a possible modulation technique for multimedia applications in the range of mm waves - Dušan Matiaš. 10/30/98/TUD-TVS.
6. OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) - Supervisor: Wada, TOMOHISA. Editor: Tamaki, SHO. Copyright (C) 2002 Magna Design Net, Inc. All Rights Reserved.
7. Progetto di un Modem Numerico a Banda Larga per Comunicazioni Subacque. Tesi di Laurea. - Michele Micheli; I° RELATORE: Prof. Dr. Ruggero Reggiannini, Università di Pisa. Ottobre 2002.

Ringraziamenti

Gli autori vogliono ringraziare tutti coloro che hanno offerto la loro disponibilità a suggerire chiarimenti e commenti a questo lavoro. In particolare si ringrazia il Prof. Luigi Bedini dell'ISTI – CNR di Pisa e il Prof. Ruggero Reggiannini del Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni dell'Università di Pisa.

Si ringraziano gli Ingegneri Alessio Rocchi e Roberto Neri per la gentile collaborazione.

Bertini Graziano è primo ricercatore presso l'Istituto di Scienza e Tecnologie del CNR di Pisa. I suoi interessi sono rivolti alla Elaborazione Numerica dei Segnali in banda audio con particolare riguardo alle applicazioni su processori DSP.

Di Salvo Vincenzo Giovanni ha conseguito la Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni presso l'Università di Pisa. Attualmente è associato alla ricerca presso il Laboratorio di Segnali e Immagini dell'Istituto di Scienza e Tecnologie della Informazione del CNR di Pisa. I suoi studi sono rivolti alle Metodologie di Analisi e Sintesi dei Segnali per Telecomunicazioni.