

Una procedura per la compressione di dati volumetrici mediante una tecnica PCA

Edoardo Bozzi, Massimo Chimenti, Gabriele Pieri, Ovidio Salvetti

Istituto di Scienza e Tecnologie dell'Informazione "Alessandro Faedo".

B4-23 (ottobre 2003)

Sommario

Introduzione	3
Procedura di elaborazione	4
Trasformata di Karhunen-Loeve	4
Trasformazione lineare.....	7
Fase di apprendimento.....	7
Fase di misura.....	7
Classificazione	10
Interfaccia utente	11
Esempi	14
Trasformazione di dati di sintesi	14
Caso 1: dimensioni del volume VS1: $4 \times 4 \times 5$	15
Caso 2: dimensioni del volume VS2: $4 \times 4 \times 5$	16
Caso 3: dimensioni del volume VS3: $4 \times 4 \times 5$	17
Caso 4: dimensioni del volume VS4: $4 \times 4 \times 5$	18
Caso 5: dimensioni del volume VS5: $4 \times 4 \times 5$	19
Caso 6: dimensioni del volume VS6: $4 \times 4 \times 5$	20
Caso 7: dimensioni del volume VS1: $40 \times 40 \times 5$	22
Caso 8: dimensioni del volume VS8: $40 \times 40 \times 5$	23
Caso 9: dimensioni del volume VS9: $40 \times 40 \times 5$	24
Caso 10: dimensioni del volume VS10: $40 \times 40 \times 5$	25
Trasformazione di dati di misura	26
Caso 1: File Corr_Seq4; dimensioni del volume VR1: $156 \times 211 \times 136$	27
Caso 2: File Poro 5s I18; dimensioni del volume VR2: $240 \times 320 \times 8$	28
Caso 3: File Fogolino; dimensioni del volume VR3: $136 \times 272 \times 5$	40
Caso 4: File Piastrella; dimensioni del volume VR4: $175 \times 168 \times 31$	44
Classificazioni	48
Mappa binaria.....	48
Mappa a colori.....	50
Discussione e conclusioni	52
Bibliografia.....	59

Introduzione

Il risultato dell'ispezione di un oggetto mediante stimoli di differenti specie, come onde ultrasonore o elettromagnetiche, può essere costituito da un volume di dati, organizzati in una matrice a tre dimensioni V .

Per esempio, nel caso di ispezione mediante ultrasuoni il segnale $s(t)$ rivelato dalla sonda posta in una determinata posizione può essere campionato, ottenendo così un vettore di K elementi, individuati dall'indice $k = 1, 2, \dots, K$; se la sonda viene traslata lungo un reticolo di scansione definito in un piano, si possono eseguire I misure per riga per ciascuna delle J righe e si hanno quindi complessivamente $I \times J \times K$ dati.

In modo analogo, se si usa un sensore di area composto da $I \times J$ elementi per rivelare il flusso luminoso o termico emesso o riflesso dall'oggetto in esame, ad ogni acquisizione si ottiene un'immagine definita da $I \times J$ pixel, ciascuno dei quali è definito da un valore di misura; se si esegue una sequenza temporale di K acquisizioni, si ottengono ancora complessivamente $I \times J \times K$ dati.

Inoltre, il vettore di dati può essere elaborato, per esempio mediante una regressione di tipo non lineare, ricavandone un nuovo vettore di N parametri: si può quindi considerare il caso più generale, in cui si dispone di un volume di $I \times J \times N$ dati pre-elaborati, eventualmente coincidente col volume di $I \times J \times K$ dati di acquisizione. Gli indici i e j , relativi rispettivamente alle dimensioni I e J della matrice, corrispondono alle posizioni di misura nel piano di scansione e individuano quindi delle aree elementari $a(i,j)$ sulla superficie esaminata dell'oggetto; per ogni valore di i e j il vettore di N elementi dipende dalla composizione e dalla struttura di un volume elementare dell'oggetto, con base $a(i,j)$.

Di solito, la rappresentazione pittorica di questo volume è di poca utilità in quanto è difficilmente interpretabile, e si rappresentano quindi sia mappe bidimensionali, ottenute tenendo costante uno degli indici i, j, m della matrice tridimensionale, sia grafici dei vettori ottenuti tenendo costanti due indici della matrice; in certi casi, comprimendo opportunamente la dimensione N della matrice dei dati, è possibile ottenere mappe di dimensioni $I \times J$ che descrivono in modo adeguato la struttura o le proprietà locali dell'oggetto e che possono quindi risultare utili per successive operazioni di analisi e classificazione.

La tecnica di Analisi delle Componenti Principali (PCA) può essere usata se, dopo la trasformazione, la somma delle varianze delle prime due o tre componenti principali è eguale ad una frazione sufficiente elevata della varianza totale dei dati d'ingresso: in questo caso ogni elemento della matrice trasformata può essere definito con due o tre valori e si possono quindi produrre mappe pittoriche in cui ciascun pixel definisce il valore di due o tre componenti cromatiche.

Procedura di elaborazione

Trasformata di Karhunen-Loeve

Ai fini dell'applicazione della tecnica PCA, il volume V di dati d'ingresso, con dimensioni $I \times J \times N$, può essere ricondotto ad una tabella di $M = I \cdot J$ casi, ognuno dei quali è definito da N variabili: si ha quindi la matrice d'ingresso A , con dimensioni $M \times N$.

Data la matrice A , la trasformata PCA (detta anche trasformata di Karhunen-Loeve), eseguita usando il toolbox di statistica del software MATLAB, fornisce i seguenti dati (vedi figura 1):

$B \equiv$ matrice d'uscita

$C \equiv$ matrice delle componenti principali

$S \equiv$ vettore delle varianze delle colonne di B

Le matrici dei dati d'ingresso e di uscita hanno le stesse dimensioni: ciò corrisponde al fatto che ogni riga di A , assimilabile ad un punto in uno spazio a n dimensioni, viene proiettato in un nuovo spazio con n assi ortogonali. Se si considerano soltanto i primi due assi PCA1 e PCA2, corrispondenti alle prime due componenti principali, il risultato della trasformata può essere rappresentato come un grafico di tipo scatter: questo grafico può essere immediatamente usato per valutare la presenza di raggruppamenti dei punti ed eseguire quindi procedure di classificazione o interpretazione.

La matrice d'uscita B può essere convertita nel volume di $I \times J \times N$ dati d'uscita, semplicemente riscrivendo le M righe di B come I righe di lunghezza J . Se la riduzione dei dati d'uscita è fatta come descritto in precedenza, si ottiene la matrice B^* con dimensioni $M \times 2$ e si ha quindi una mappa di $I \times J$ elementi, ciascuno dei quali è definito da una coppia di valori: la rappresentazione pittorica della mappa può essere fatta definendo una relazione tra la coppia dei valori e due scale fotometriche di due componenti cromatiche. In modo analogo si possono avere rappresentazioni a livelli di grigio quando $N = 1$ e rappresentazioni RGB quando $N = 3$.

La figura 2 mostra le fasi di trasformazione, riduzione e rappresentazione dei dati.

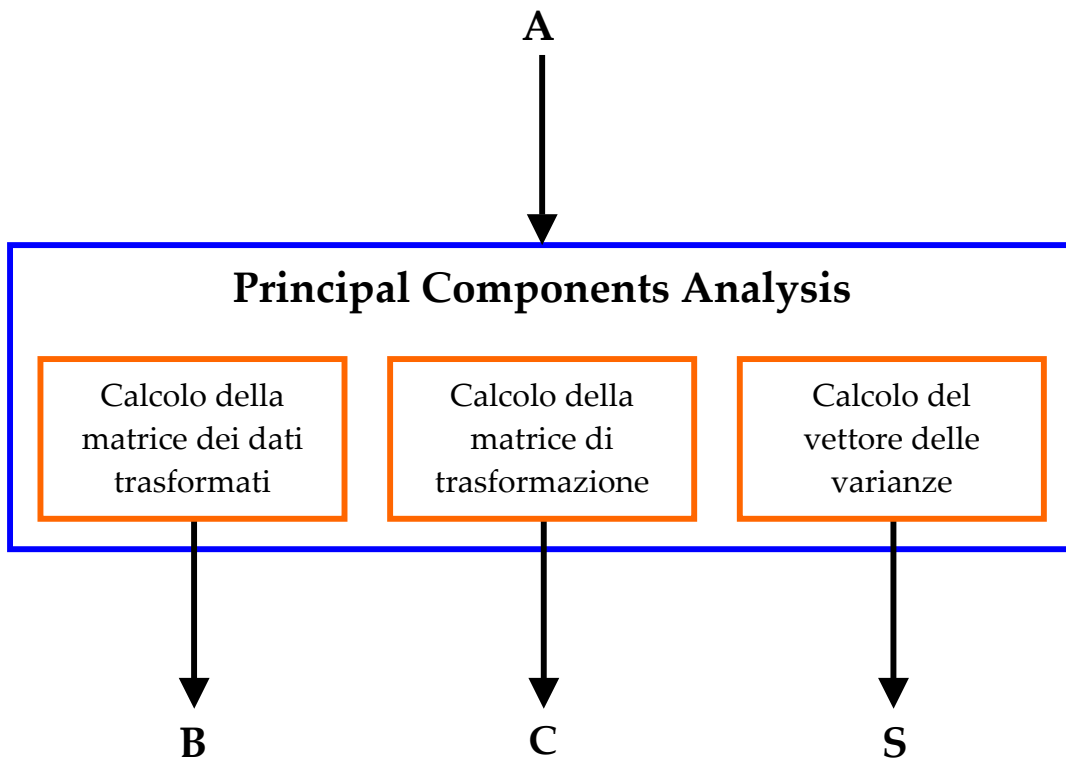


Figura 1. Dati prodotti dalla trasformata di Karhunen-Loeve.

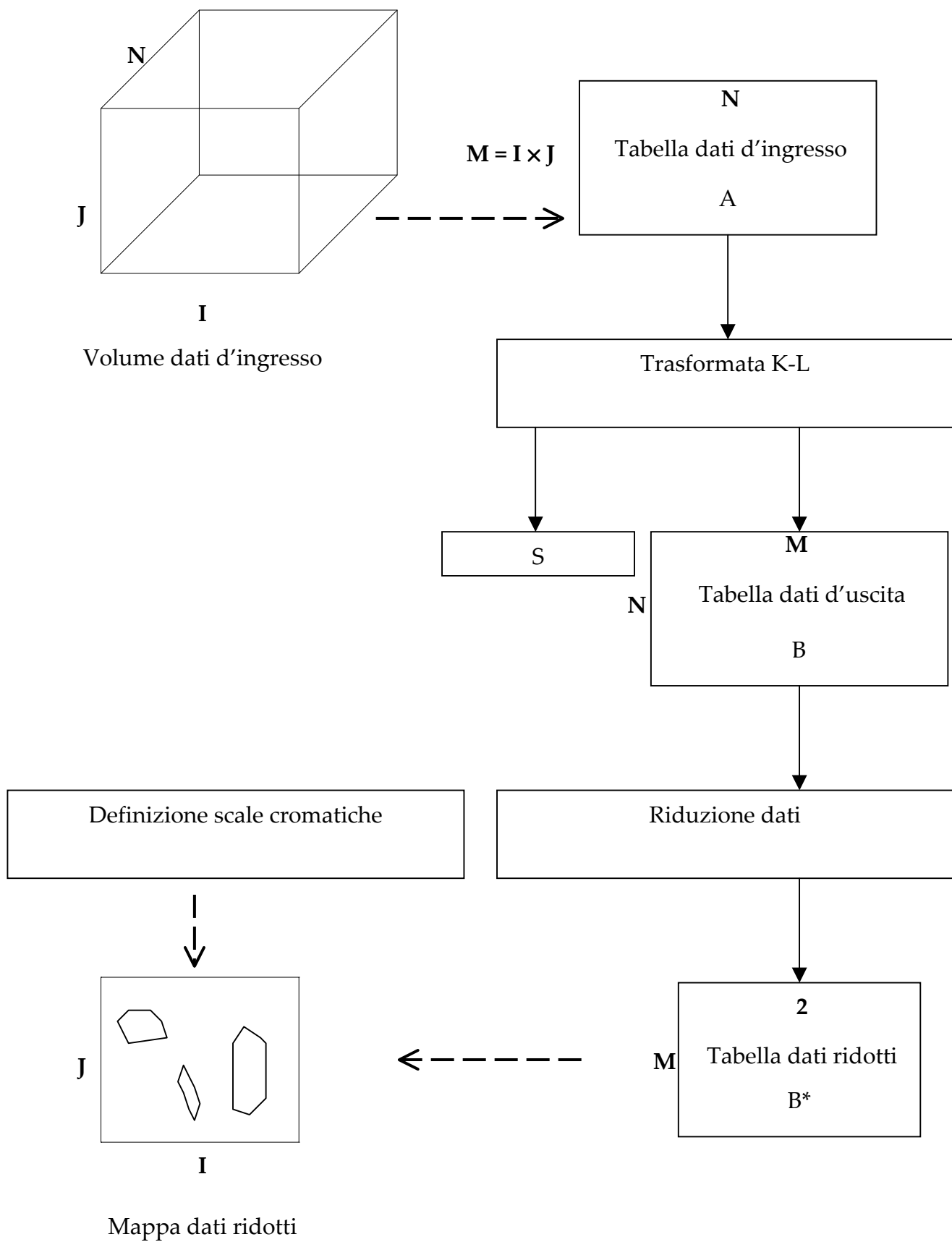


Figura 2. Dati trattati dalla trasformata PCA.

Trasformazione lineare

La matrice dei dati di uscita B può essere ottenuta mediante la seguente relazione matriciale:

$$B = A' C \quad (1)$$

dove C è la matrice delle componenti principali e A' è la matrice ottenuta sottraendo da ciascun elemento $a_{n,m}$ di A la media degli elementi della corrispondente colonna.

Questa proprietà è stata usata per realizzare una procedura di confronto tra i dati appartenenti a differenti volumi, per rilevare la presenza di dati eguali ad un insieme di dati presi come riferimento.

La procedura è costituita da due fasi.

Fase di apprendimento

In questa fase viene preso un volume di dati V1, ricavato dall'ispezione di un oggetto, o di una parte di esso, la cui struttura abbia caratteristiche note; applicando la trasformata PCA alla matrice A1 ricavata da V1 si ottiene la matrice delle componenti principali C1, e si calcola inoltre il vettore U1, i cui elementi consistono nelle medie delle colonne di A1.

Dalla matrice dei dati trasformati B1 vengono ricavati la matrice ridotta B1* ed il volume di dati ridotto W1*, usati per la rappresentazione di scatter plot e mappe pittoriche.

Fase di misura

In questa fase viene preso un volume di dati V2, ricavato dall'ispezione di un'altra parte dello stesso oggetto o da un oggetto diverso; la matrice A2 ricavata da V2 viene modificata nella matrice A'2 usando il vettore delle medie di colonna U1, ricavato nella fase di apprendimento. La matrice A'2 viene infine moltiplicata per la matrice delle componenti principali C1, ricavata anch'essa nella fase di apprendimento, ottenendo così la matrice di dati d'uscita B2. Da B2 si ricavano la matrice ridotta B2* ed il volume di dati ridotto W2*, usati per la rappresentazione di scatter plot e mappe pittoriche.

Le figure 3 e 4 mostrano i diagrammi a blocchi delle due fasi della procedura sviluppata; si è assunto di considerare solo le prime due componenti principali, in modo che per i dati di uscita si ha $N = 2$.

Le figure mostrano due possibili rappresentazioni dei dati d'uscita:

- scatter plot, in cui gli elementi della matrice B sono rappresentati come punti nel piano definito dalla trasformazione: le coordinate dei punti sono riferite agli assi PC1 e PC2
- mappa, in cui gli elementi della matrice B sono rappresentati come pixel con due valori di crominanza: le coordinate dei pixel sono riferite agli assi I e J, conformi agli assi x e y del sistema di riferimento usato per l'acquisizione dei dati d'ingresso.

In base all'approccio sopra descritto, gli elementi di V2 eguali agli elementi di V1 vengono proiettati alle medesime coordinate nello spazio delle PCA e hanno gli stessi valori nelle

mappe d'uscita: il confronto delle mappe consente quindi di rivelare e localizzare facilmente la presenza di punti aventi valore eguale a quelli presi come riferimento: se i dati sono stati acquisiti nelle stesse condizioni, i punti con lo stesso valore sulle diverse mappe individuano regioni di oggetti con le stesse caratteristiche.

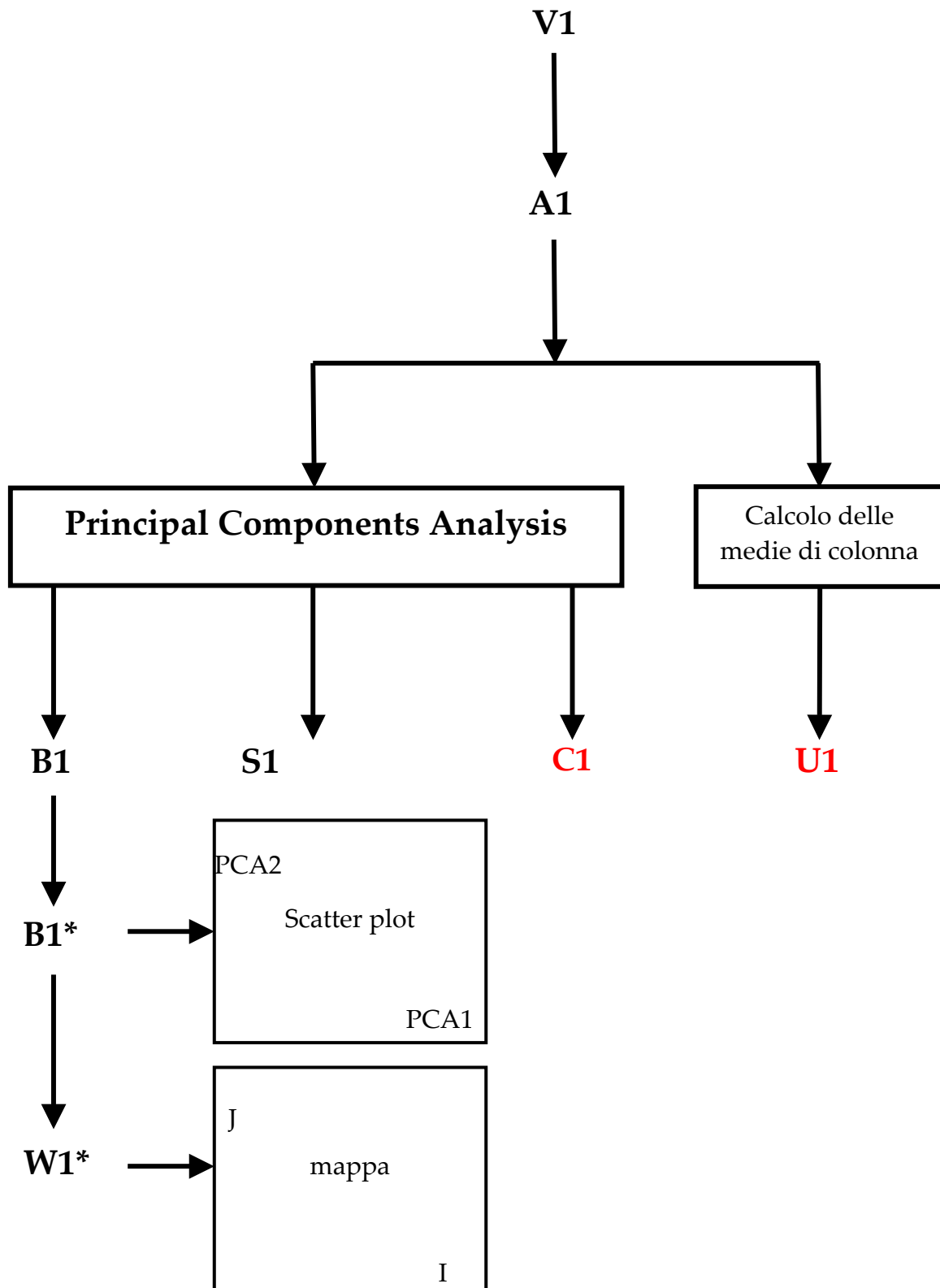


Figura 3. Fase di apprendimento della procedura di elaborazione basata sulla PCA.

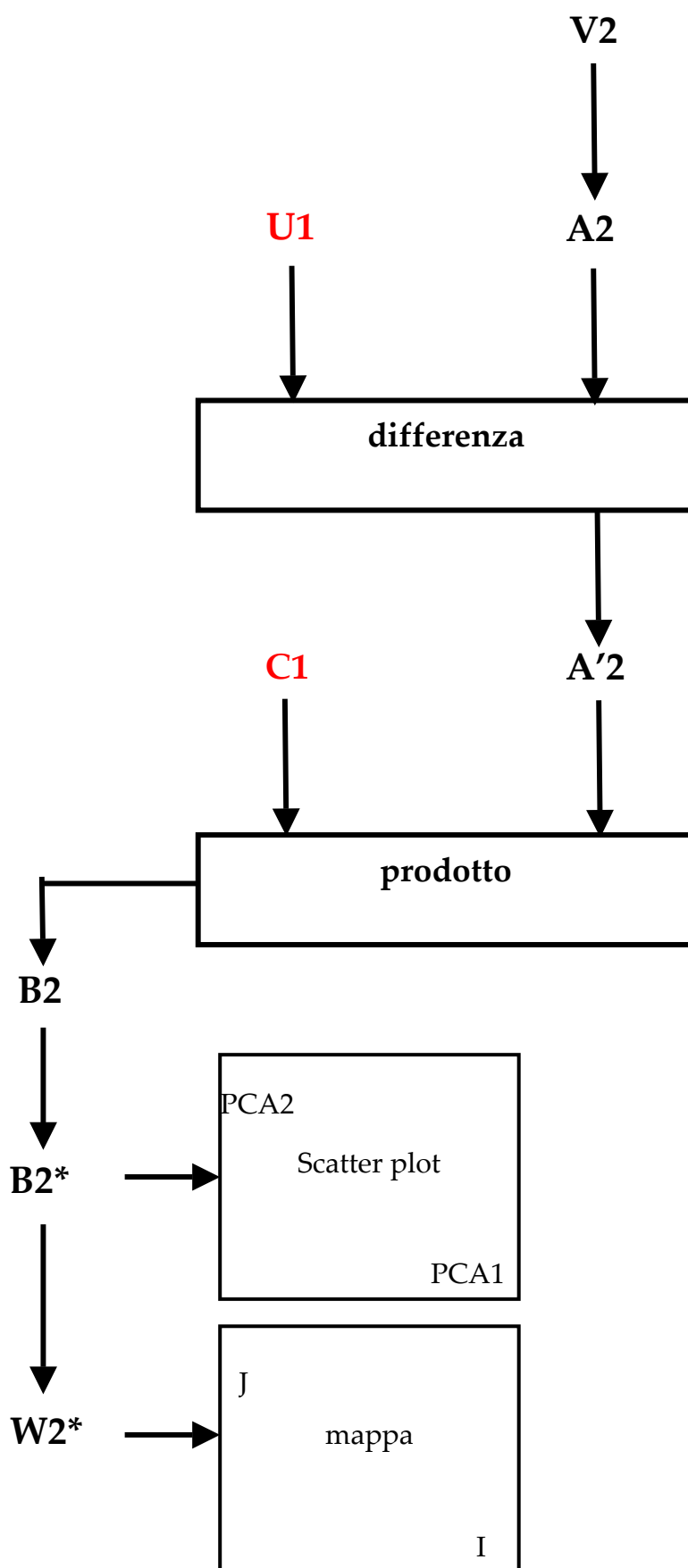


Figura 4. Fase di misura della procedura di elaborazione basata sulla PCA.

Classificazione

Nel piano delle prime due componenti principali le posizioni dei punti proiettati dipendono dai valori degli elementi del volume dei dati d'ingresso e sono tanto più vicine quanto meno sono distanti gli elementi nello spazio d'ingresso: per esempio, se V è costituito da elementi che possono assumere solo due valori diversi, nel diagramma scatter si ottengono due soli punti.

Al fine di classificare gli elementi del volume di dati in esame si può usare la distanza di un punto proiettato dal cluster dei punti determinato dal volume di dati di riferimento. Si può per esempio misurare la distanza di un punto dal baricentro del cluster di riferimento e assegnare tale punto ad una classe associata al valore di distanza: nel caso di classificazione di tipo binario si può assegnare il punto alla classe 0 se la distanza è inferiore ad un valore di soglia, mentre si assegna il punto alla classe 1 se la distanza supera il valore di soglia. Se si vogliono mantenere le informazioni presenti nel digramma scatter si possono considerare separatamente le proiezioni della distanza sugli assi PC1 e PC2 e considerare due differenti valori di soglia.

La mappa dei dati può essere realizzata scegliendo una singola scala cromatica che sia funzione della distanza nel piano PCA, oppure due scale in funzione delle componenti della distanza; nel caso di classificazione binaria la mappa viene rappresentata con due soli colori o livelli di grigio.

Interfaccia utente

In Figura 5 è mostrata la finestra di apertura dell'interfaccia utente.

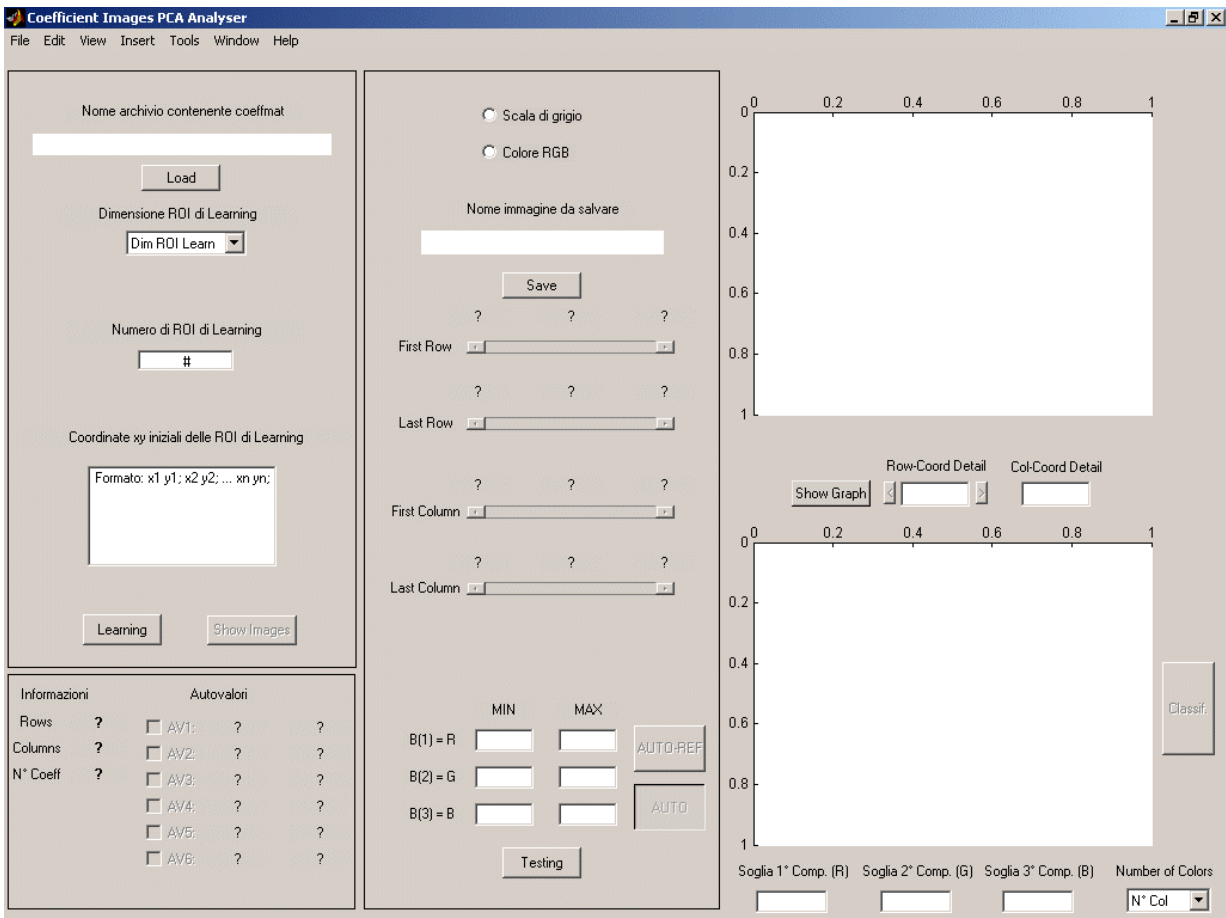


Figura 5. Interfaccia utente dell'applicazione all'apertura.

L'interfaccia è suddivisa in 4 parti: la prima consente il caricamento di un volume di dati e l'inserimento dei valori per effettuare la fase di apprendimento (esempio in Figura 6).

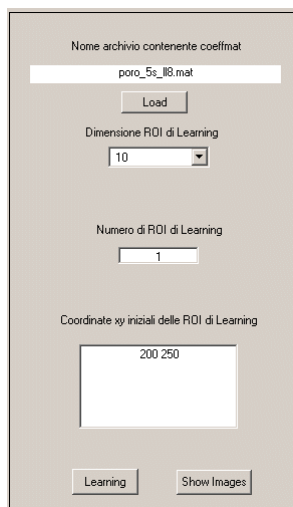


Figura 6. Prima parte dell'interfaccia.

La seconda parte dell'interfaccia mostra le informazioni dimensionali relative al volume in esame; al termine dell'apprendimento la finestra mostra la varianza assoluta e percentuale degli autovalori ricavati tramite l'analisi PCA, e consente di scegliere i dati da visualizzare, come componenti RGB, nella fase di misura (esempio in Figura 7).

Informazioni		Autovalori		
Rows	240	<input checked="" type="checkbox"/> AV1:	0.0012	62.0%
Columns	320	<input checked="" type="checkbox"/> AV2:	0.0005	26.6%
N° Coeff	8	<input checked="" type="checkbox"/> AV3:	0.0002	10.1%
		<input type="checkbox"/> AV4:	0.0000	1.1%
		<input type="checkbox"/> AV5:	0.0000	0.2%
		<input type="checkbox"/> AV6:	0.0000	0.0%

Figura 7. Seconda parte dell'interfaccia.

La terza parte dell'interfaccia riguarda i preparativi alla fase di misura: in questa sezione si possono scegliere il nome del file con cui salvare l'immagine elaborata, i limiti del volumi da usare per la fase di misura e, dopo la prima fase di misura, gli estremi di proiezione (automatica o manuale) dei dati (esempio in Figura 8).

Scala di grigio
 Colore RGB

Nome immagine da salvare

Poro_5s_I8-Classif-200_250-AV_123.bmp

Save

1 1 240

First Row

240 240 240

Last Row

1 1 320

First Column

320 320 320

Last Column

	MIN	MAX	
B(1) = R	<input type="text" value="-0.568"/>	<input type="text" value="3.255"/>	AUTO-REF
B(2) = G	<input type="text" value="-3.017"/>	<input type="text" value="0.408"/>	AUTO
B(3) = B	<input type="text" value="-1.206"/>	<input type="text" value="0.419"/>	AUTO

Testing

Figura 8. Terza parte dell'interfaccia.

L'ultima parte dell'interfaccia è quella di visualizzazione: in questa sezione vengono mostrati i risultati della fase di misura e dell'eventuale successiva classificazione binaria secondo una soglia impostabile (esempio in Figura 9).

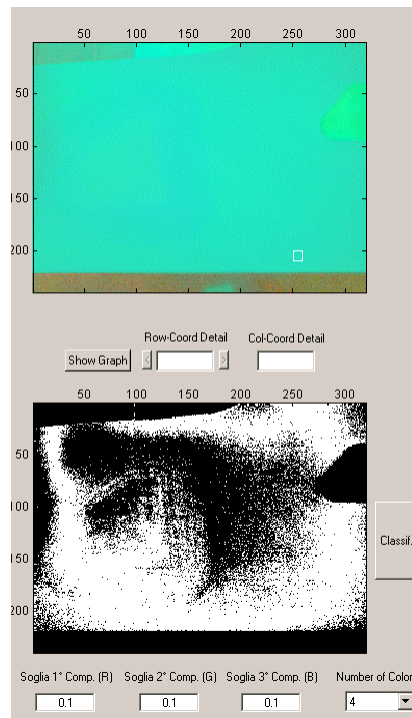


Figura 9. Quarta parte dell'interfaccia.

Esempi

La procedura è stata provata inizialmente con volumi di dati di sintesi, costruiti al fine di verificare l'esattezza del programma, e successivamente con dati ricavati da acquisizioni di differenti materiali con diverse tecniche.

Nel seguito si riportano esempi di trasformazione di dati e di classificazione.

Trasformazione di dati di sintesi

Sono stati costruiti volumi di dati VS , con dimensioni $I \times J \times N$, e con le seguenti caratteristiche: fissato i e j , il valore dell'elemento è costante per tutti i valori dell'indice n . In questo modo, da ogni volume VS si ricava una tabella definita da una matrice A , di dimensioni $M \times N$, con $M = I \cdot J$, avente le colonne eguali.

Di seguito si riportano due tipi di risultati.

Dati numerici

- tabella d'uscita B
- matrice delle componenti principali C
- vettore delle varianze percentuali $S\%$, ottenuto moltiplicando gli elementi del vettore S in modo che la somma degli elementi di $S\%$ sia eguale a 100.

Dati grafico-pittorici

- scatter plot delle prime due componenti principali
- mappe RGB, definite dalle prime tre componenti principali
- mappe monocromatiche, definite da una componente principale.

Le scale di rappresentazione delle mappe pittoriche sono state definite in due modi:

- selezione automatica: per ogni componente la procedura calcola il valore di minimo $L1$ e di massimo $L2$ e proietta l'intervallo $L1 - L2$ su una rampa lineare crescente, con 255 livelli di colore
- selezione manuale: i valori di minimo e di massimo sono inseriti dall'utente per ciascuna componente da rappresentare.

Caso 1: dimensioni del volume VS1: $4 \times 4 \times 5$

A						B				
1	1	1	1	1		-16.7705	0	0	0	0
2	2	2	2	2		-14.5344	0	0	0	0
3	3	3	3	3		-12.2984	0	0	0	0
4	4	4	4	4		-10.0623	0	0	0	0
5	5	5	5	5		-7.8262	0	0	0	0
6	6	6	6	6		-5.5902	0	0	0	0
7	7	7	7	7		-3.3541	0	0	0	0
8	8	8	8	8		-1.118	0	0	0	0
9	9	9	9	9		1.118	0	0	0	0
10	10	10	10	10		3.3541	0	0	0	0
11	11	11	11	11		5.5902	0	0	0	0
12	12	12	12	12		7.8262	0	0	0	0
13	13	13	13	13		10.0623	0	0	0	0
14	14	14	14	14		12.2984	0	0	0	0
15	15	15	15	15		14.5344	0	0	0	0
16	16	16	16	16		16.7705	0	0	0	0
8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	Medie	0	0	0	0	0
22.7	22.7	22.7	22.7	22.7	Varianze	113.333	0	0	0	0

C

-0,4472 -0,2113 0,7887 -0,3605 -0,0583
-0,4472 0,7887 -0,2113 -0,3605 -0,0583
-0,4472 -0,5774 -0,5774 -0,3605 -0,0583
-0,4472 0,0000 0,0000 0,6535 -0,6106
-0,4472 0,0000 0,0000 0,4279 0,7854

Tabella 1. Dati relativi al volume VS1.

Caso 2: dimensioni del volume VS2: $4 \times 4 \times 5$

A						B				
2	2	2	2	2		-16.7705	0	0	0	0
3	3	3	3	3		-14.5344	0	0	0	0
4	4	4	4	4		-12.2984	0	0	0	0
5	5	5	5	5		-10.0623	0	0	0	0
6	6	6	6	6		-7.8262	0	0	0	0
7	7	7	7	7		-5.5902	0	0	0	0
8	8	8	8	8		-3.3541	0	0	0	0
9	9	9	9	9		-1.118	0	0	0	0
10	10	10	10	10		1.118	0	0	0	0
11	11	11	11	11		3.3541	0	0	0	0
12	12	12	12	12		5.5902	0	0	0	0
13	13	13	13	13		7.8262	0	0	0	0
14	14	14	14	14		10.0623	0	0	0	0
15	15	15	15	15		12.2984	0	0	0	0
16	16	16	16	16		14.5344	0	0	0	0
17	17	17	17	17		16.7705	0	0	0	0
9.5	9.5	9.5	9.5	9.5	Medie	0	0	0	0	0
22.7	22.7	22.7	22.7	22.7	Varianze	113.333	0	0	0	0

C

-0,4472 -0,2236 -0,1667 -0,1667 0,8333
-0,4472 -0,2236 0,8333 -0,1667 -0,1667
-0,4472 -0,2236 -0,1667 0,8333 -0,1667
-0,4472 -0,2236 -0,5000 -0,5000 -0,5000
-0,4472 0,8944 0,0000 0,0000 0,0000

Tabella 2. Dati relativi al volume VS2.

Caso 3: dimensioni del volume VS3: $4 \times 4 \times 5$

A						B				
3	3	3	3	3		-33.541	0	0	0	0
5	5	5	5	5		-29.0689	0	0	0	0
7	7	7	7	7		-24.5967	0	0	0	0
9	9	9	9	9		-20.1246	0	0	0	0
11	11	11	11	11		-15.6525	0	0	0	0
13	13	13	13	13		-11.1803	0	0	0	0
15	15	15	15	15		-6.7082	0	0	0	0
17	17	17	17	17		-2.2361	0	0	0	0
19	19	19	19	19		2.2361	0	0	0	0
21	21	21	21	21		6.7082	0	0	0	0
23	23	23	23	23		11.1803	0	0	0	0
25	25	25	25	25		15.6525	0	0	0	0
27	27	27	27	27		20.1246	0	0	0	0
29	29	29	29	29		24.5967	0	0	0	0
31	31	31	31	31		29.0689	0	0	0	0
33	33	33	33	33		33.541	0	0	0	0
18	18	18	18	18	Medie	0	0	0	0	0
90.7	90.7	90.7	90.7	90.7	Varianze	453.333	0	0	0	0

C

-0,4472 -0,2113 0,7887 0,3605 -0,0583
-0,4472 0,7887 -0,2113 0,3605 -0,0583
-0,4472 -0,5774 -0,5774 0,3605 -0,0583
-0,4472 0,0000 0,0000 -0,6535 -0,6106
-0,4472 0,0000 0,0000 -0,4279 0,7854

Tabella 3. Dati relativi al volume VS3.

Caso 4: dimensioni del volume VS4: $4 \times 4 \times 5$

A						B				
3	3	3	3	3		-50.3115	0	0	0	0
6	6	6	6	6		-43.6033	0	0	0	0
9	9	9	9	9		-36.8951	0	0	0	0
12	12	12	12	12		-30.1869	0	0	0	0
15	15	15	15	15		-23.4787	0	0	0	0
18	18	18	18	18		-16.7705	0	0	0	0
21	21	21	21	21		-10.0623	0	0	0	0
24	24	24	24	24		-3.3541	0	0	0	0
27	27	27	27	27		3.3541	0	0	0	0
30	30	30	30	30		10.0623	0	0	0	0
33	33	33	33	33		16.7705	0	0	0	0
36	36	36	36	36		23.4787	0	0	0	0
39	39	39	39	39		30.1869	0	0	0	0
42	42	42	42	42		36.8951	0	0	0	0
45	45	45	45	45		43.6033	0	0	0	0
48	48	48	48	48		50.3115	0	0	0	0
25.5	25.5	25.5	25.5	25.5	Medie	0	0	0	0	0
204	204	204	204	204	Varianze	1020	0	0	0	0

C

-0,4472 -0,2113 0,7887 0,3605 -0,0583
-0,4472 0,7887 -0,2113 0,3605 -0,0583
-0,4472 -0,5774 -0,5774 0,3605 -0,0583
-0,4472 0,0000 0,0000 -0,6535 -0,6106
-0,4472 0,0000 0,0000 -0,4279 0,7854

Tabella 4. Dati relativi al volume VS4.

Caso 5: dimensioni del volume VS5: $4 \times 4 \times 5$

A						B				
2	2	2	2	2		-33.541	0	0	0	0
4	4	4	4	4		-29.0689	0	0	0	0
6	6	6	6	6		-24.5967	0	0	0	0
8	8	8	8	8		-20.1246	0	0	0	0
10	10	10	10	10		-15.6525	0	0	0	0
12	12	12	12	12		-11.1803	0	0	0	0
14	14	14	14	14		-6.7082	0	0	0	0
16	16	16	16	16		-2.2361	0	0	0	0
18	18	18	18	18		2.2361	0	0	0	0
20	20	20	20	20		6.7082	0	0	0	0
22	22	22	22	22		11.1803	0	0	0	0
24	24	24	24	24		15.6525	0	0	0	0
26	26	26	26	26		20.1246	0	0	0	0
28	28	28	28	28		24.5967	0	0	0	0
30	30	30	30	30		29.0689	0	0	0	0
32	32	32	32	32		33.541	0	0	0	0
17	17	17	17	17	Medie	0	0	0	0	0
90.7	90.7	90.7	90.7	90.7	Varianze	453.333	0	0	0	0

C

-0,4472 -0,2113 0,7887 0,3605 -0,0583
-0,4472 0,7887 -0,2113 0,3605 -0,0583
-0,4472 -0,5774 -0,5774 0,3605 -0,0583
-0,4472 0,0000 0,0000 -0,6535 -0,6106
-0,4472 0,0000 0,0000 -0,4279 0,7854

Tabella 5. Dati relativi al volume VS5.

Caso 6: dimensioni del volume VS6: $4 \times 4 \times 5$

A						B				
10	10	10	10	10		-167.705	0	0	0	0
20	20	20	20	20		-145.344	0	0	0	0
30	30	30	30	30		-122.984	0	0	0	0
40	40	40	40	40		-100.623	0	0	0	0
50	50	50	50	50		-78.2624	0	0	0	0
60	60	60	60	60		-55.9017	0	0	0	0
70	70	70	70	70		-33.541	0	0	0	0
80	80	80	80	80		-11.1803	0	0	0	0
90	90	90	90	90		11.1803	0	0	0	0
100	100	100	100	100		33.541	0	0	0	0
110	110	110	110	110		55.9017	0	0	0	0
120	120	120	120	120		78.2624	0	0	0	0
130	130	130	130	130		100.623	0	0	0	0
140	140	140	140	140		122.984	0	0	0	0
150	150	150	150	150		145.344	0	0	0	0
160	160	160	160	160		167.705	0	0	0	0
85	85	85	85	85	Medie	0	0	0	0	0
2266.7	2266.7	2266.7	2266.7	2266.7	Varianze	11333.3	0	0	0	0

C

-0,4472 -0,2236 -0,1667 -0,1667 0,8333
-0,4472 -0,2236 0,8333 -0,1667 -0,1667
-0,4472 -0,2236 -0,1667 0,8333 -0,1667
-0,4472 -0,2236 -0,5000 -0,5000 -0,5000
-0,4472 0,8944 0,0000 0,0000 0,0000

Tabella 6. Dati relativi al volume VS6.

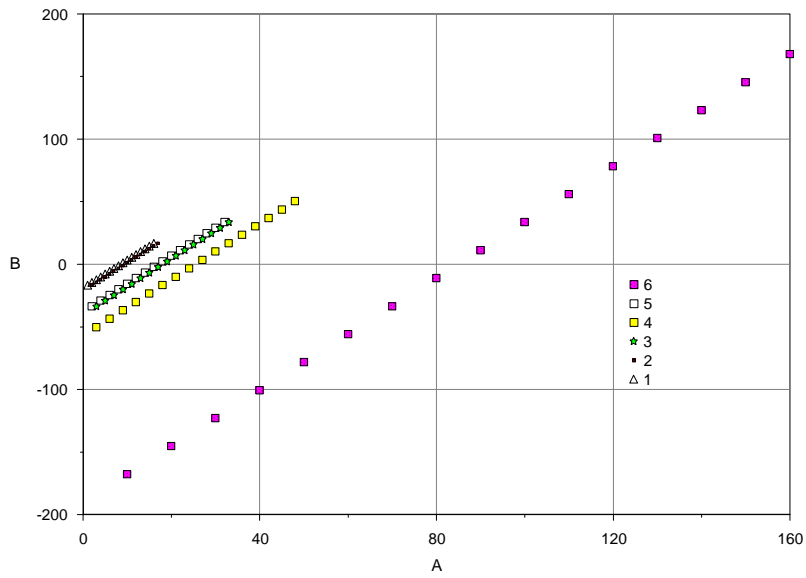


Figura 10. Diagrammi dei valori dei dati d'ingresso e d'uscita riportati nelle tabelle 1 + 6; sono state considerate soltanto le prime colonne dei dati.

Caso 7: dimensioni del volume VS1: $40 \times 40 \times 5$

Il volume dei dati d'ingresso è costituito da una matrice di 40×40 elementi, con valore 5 oppure 215.

C

```
-0.4472  0.8944  0.0000  0.0000 -0.0000
-0.4472 -0.2236 -0.8660 -0.0000  0.0000
-0.4472 -0.2236  0.2887  0.8165 -0.0000
-0.4472 -0.2236  0.2887 -0.4082  0.7071
-0.4472 -0.2236  0.2887 -0.4082 -0.7071
```

S%

100 0 0 0 0

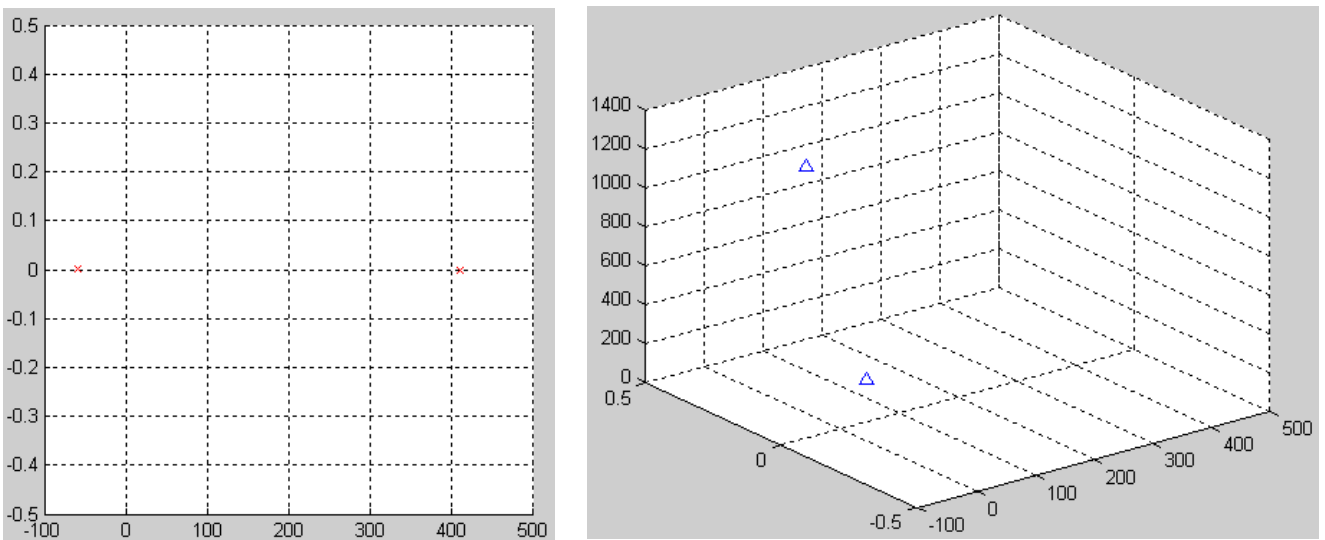


Figura 11. VS7. A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).



Figura 12. VS7. A sinistra: rappresentazione grafica dei valori del volume (215 e 5) in funzione degli indici i e j ; a destra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -58.697 \div 410.87$, $G = -0 \div 0$, $B = -0 \div 0$).

Caso 8: dimensioni del volume VS8: $40 \times 40 \times 5$

Il volume dei dati d'ingresso è costituito da una matrice di 40×40 elementi, con valore 5 oppure 215.

C

```

0.4472 -0.8944 -0.0000 -0.0000  0.0000
0.4472  0.2236  0.8660  0.0000  0.0000
0.4472  0.2236 -0.2887  0.8165 -0.0000
0.4472  0.2236 -0.2887 -0.4082  0.7071
0.4472  0.2236 -0.2887 -0.4082 -0.7071
    
```

S%

```
100 0 0 0 0
```

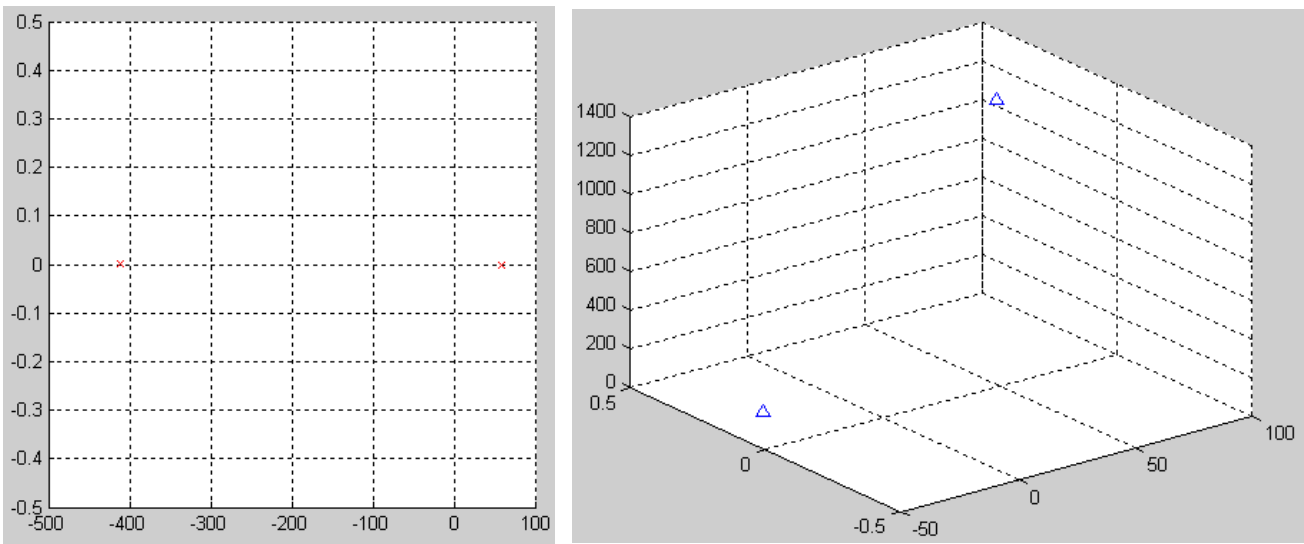


Figura 13. VS8. A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).



Figura 14. VS8. A sinistra: rappresentazione grafica dei valori del volume (215 e 5) in funzione degli indici i e j ; a destra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -58.697 + 410.87$, $G = -0 + 0$, $B = -0 + 0$).

Caso 9: dimensioni del volume VS9: $40 \times 40 \times 5$

Il volume dei dati d'ingresso è costituito da una matrice di 40×40 elementi, con valore 5 oppure 215.

C(5,5)

```

-0.4472  0.8944  0.0000  0.0000 -0.0000
-0.4472 -0.2236 -0.8660 -0.0000 -0.0000
-0.4472 -0.2236  0.2887 -0.8165  0.0000
-0.4472 -0.2236  0.2887  0.4082 -0.7071
-0.4472 -0.2236  0.2887  0.4082  0.7071
    
```

S%(1,5)

100 0 0 0 0

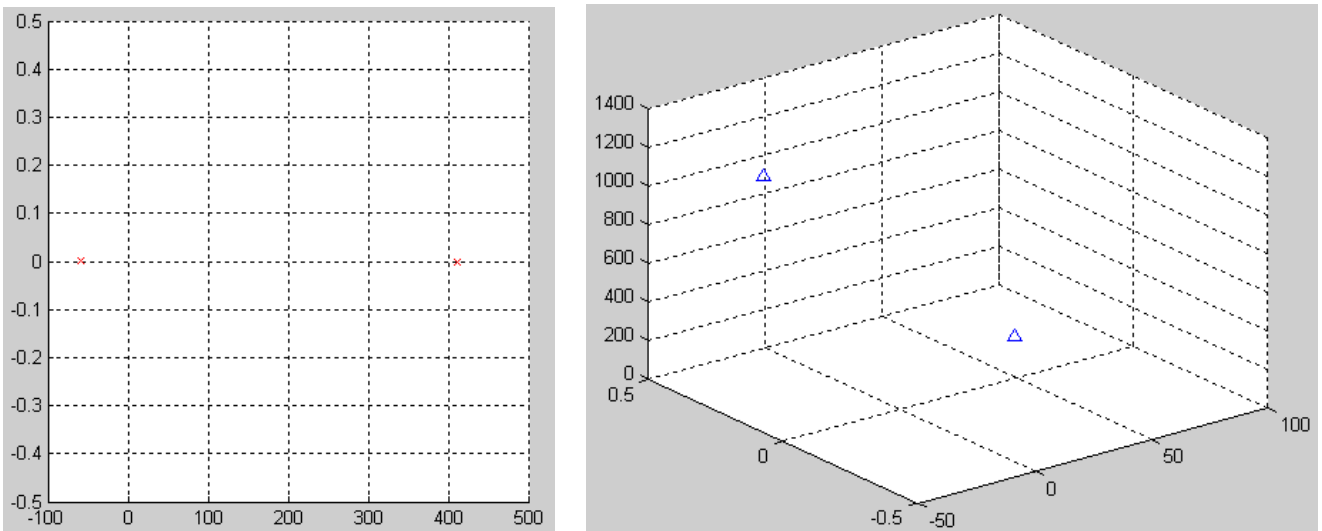


Figura 15. VS9. A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).



Figura 16. VS9. A sinistra: rappresentazione grafica dei valori del volume (215 e 5) in funzione degli indici i e j ; a destra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -58.697 \div 410.87$, $G = -0 \div 0$, $B = -0 \div 0$).

Caso 10: dimensioni del volume VS10: $40 \times 40 \times 5$

Il volume dei dati d'ingresso è costituito da una matrice di 40×40 elementi, con valore 5 oppure 215.

C

```
-0.4472  0.8944  0.0000  0.0000 -0.0000
-0.4472 -0.2236 -0.8660 -0.0000 -0.0000
-0.4472 -0.2236  0.2887  0.8165 -0.0000
-0.4472 -0.2236  0.2887 -0.4082  0.7071
-0.4472 -0.2236  0.2887 -0.4082 -0.7071
```

S%

100 0 0 0 0

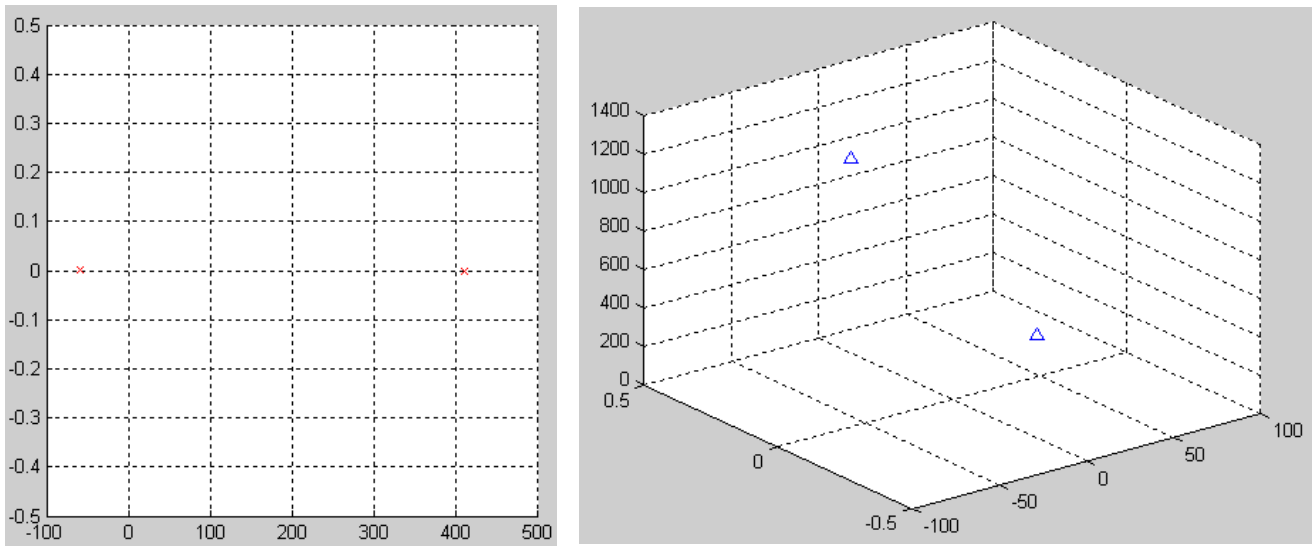


Figura 17. VS10. A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).



Figura 18. VS10. A sinistra: rappresentazione grafica dei valori del volume (215 e 5) in funzione degli indici i e j ; a destra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -58.697 + 410.87$, $G = -0 + 0$, $B = -0 + 0$).

Trasformazione di dati di misura

In questo paragrafo sono mostrati alcuni risultati ottenuti elaborando volumi di dati VR ricavati dall'ispezione di oggetti reali mediante differenti tecniche.

I casi 1, 2 e 3 costituiscono esempi relativi all'analisi del volume V dei dati ricavati da una sequenza di immagini termografiche: il volume può essere considerato come un insieme di N mappe i cui pixel sono individuati dagli indici i e j , oppure come un insieme di $I \cdot J$ profili $L(t)$, ciascuno delle quali è definito da N campioni.

Nel caso 1 il volume VR è costituito dall'insieme dei dati grezzi di acquisizione. Nei casi 2 e 3 VR è costituito dall'insieme dei dati ottenuti interpolando ciascun funzione L mediante un polinomio di grado K e prendendo i K coefficienti di ciascuna interpolazione.

Il caso 4 costituisce un esempio di elaborazione di dati ricavati da una singola immagine spettrografia, in cui ciascun pixel è definito dall'insieme di 32 valori di misura dello spettro nel visibile.

Per ciascuno dei casi suddetti il volume VR è stato trasformato in una matrice A , usata come ingresso per la procedura di analisi PCA; per calcolare la trasformata si sono usate l'intera matrice dei dati d'ingresso, oppure una sottomatrice, definita da una ROI relativa agli indici i e j di V .

Per ciascun caso si riportano due tipi di risultati.

Dati numerici

- matrice delle componenti principali C
- vettore delle varianze percentuali $S\%$, ottenuto moltiplicando gli elementi del vettore S in modo che la somma degli elementi di $S\%$ sia eguale a 100.

Dati grafico-pittorici

- scatter plot delle prime due componenti principali
- distribuzione quantitativa dei punti rispetto agli assi PCA1 e PCA2
- mappe RGB, definite dalle prime tre componenti principali
- mappe monocromatiche, definite da una componente principale.

Le scale di rappresentazione delle mappe pittoriche sono state definite in due modi:

- selezione automatica: per ogni componente la procedura calcola il valore di minimo $L1$ e di massimo $L2$ e proietta l'intervallo $L1 - L2$ su una rampa lineare crescente, con 255 livelli di colore
- selezione manuale: i valori di minimo e di massimo sono inseriti dall'utente per ciascuna componente da rappresentare.

Sono stati riportati solo i primi elementi di S , fino ad un massimo di 6.

Caso 1: File *Corr_Seq4*; dimensioni del volume VR1: $156 \times 211 \times 136$

Il volume dei dati utilizzato è stato ricavato da una sequenza di 136 immagini con dimensioni 156×211 .

Usando una ROI di apprendimento con dimensioni 156×211 si ha:

S%

55.8 4.7 1.3 1.2 1.1 1.1

La matrice di trasformazione C, con dimensioni 136×136 , non è stata riportata.

La figura 19 riporta lo scatter plot e la distribuzione dei punti; la figura 20 mostra le mappe RGB ottenute con selezione automatica e manuale.

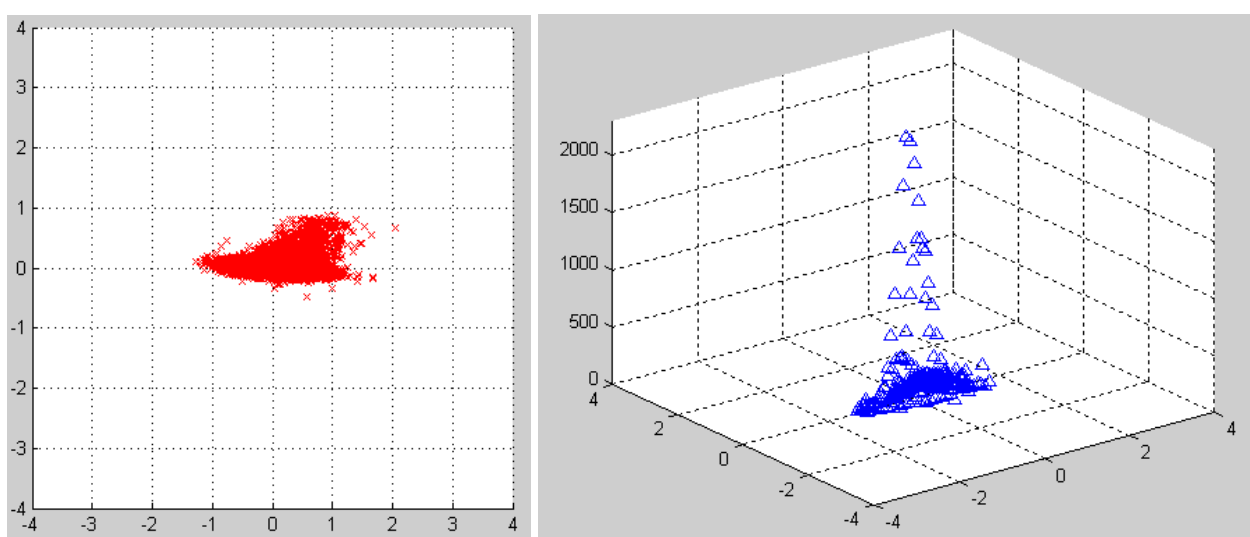


Figura 19. VR1, ROI di apprendimento di dimensioni 156×211 . A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).



Figura 20. VR2, ROI di apprendimento di dimensioni 156×211 . A sinistra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -1.269 \div 2.050$, $G = -0.483 \div 0.878$, $B = -0.454 \div 0.373$); a destra: mappa d'uscita RGB con selezione manuale ($R = G = B = -1.269 \div 2.050$).

Caso 2: File Poro 5s ll8; dimensioni del volume VR2: 240 × 320 × 8

Usando una ROI di apprendimento con dimensioni 240 × 320 si ha:

C

0.0024	0.0015	0.0114	0.0160	0.0319	-0.1117	0.2453	0.9623
-0.0100	-0.0206	-0.0433	-0.0379	-0.1463	0.1146	-0.9455	0.2603
-0.0151	0.0379	-0.0829	-0.1896	-0.0657	0.9592	0.1584	0.0773
0.0851	0.1657	0.3660	0.2994	0.8340	0.1641	-0.1378	0.0167
0.0195	-0.3866	0.1955	0.8205	-0.3317	0.1651	0.0390	0.0048
-0.2126	-0.4639	-0.7532	0.1256	0.3952	0.0049	-0.0186	0.0003
-0.1536	0.7784	-0.4214	0.4258	-0.1074	0.0065	0.0044	0.0003
0.9609	0.0154	-0.2722	0.0493	0.0005	0.0008	-0.0000	0.0000

S%

97.3 1.6 1.0 0.2 0 0

La Figura 21 riporta lo scatter plot e la distribuzione dei punti; la Figura 22 mostra le mappe RGB ottenute con selezione automatica e manuale.

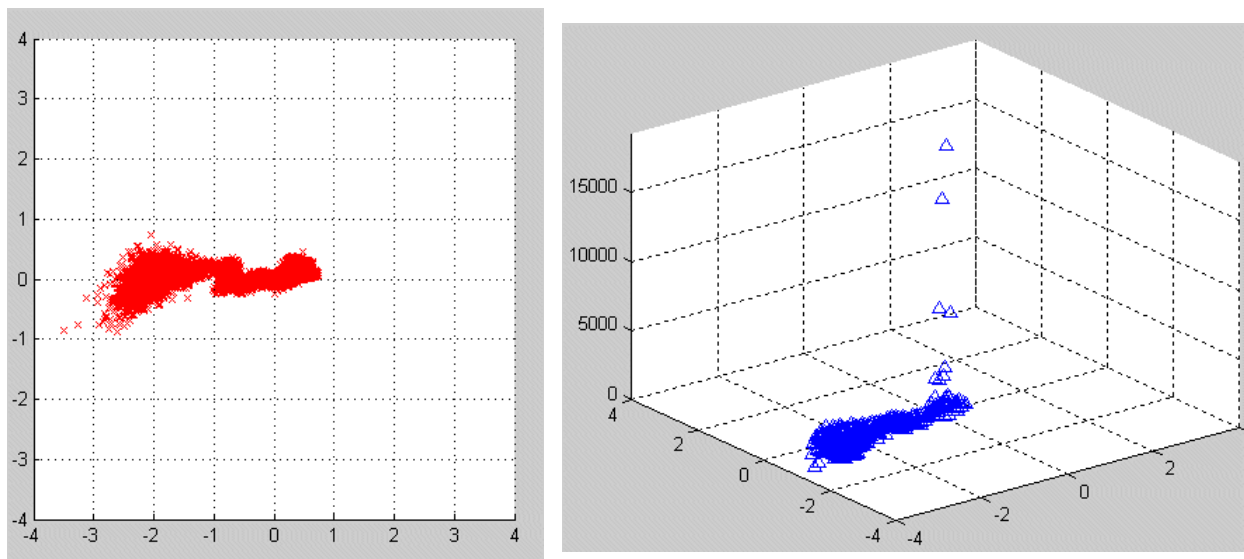


Figura 21. VR2, ROI di apprendimento di dimensioni 240×320 . A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).

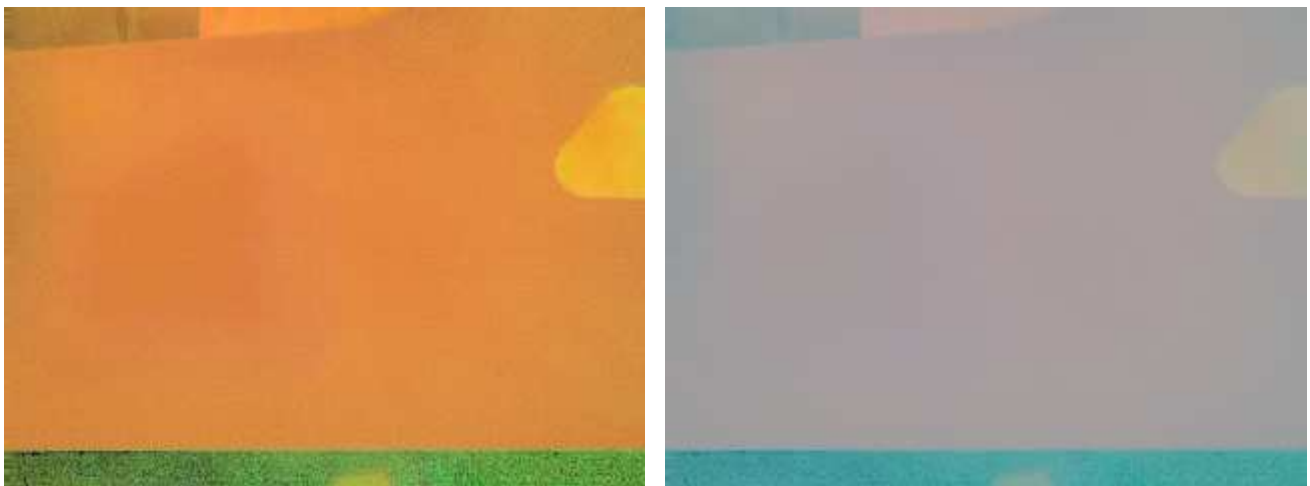


Figura 22. VR2, ROI di apprendimento di dimensioni 240×320 . A sinistra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -3.488 + 0.729$, $G = -0.870 + 0.746$, $B = -0.709 + 2.173$); a destra: mappa d'uscita RGB con selezione manuale ($R = G = B = -3.488 + 2.173$).

Usando una ROI con dimensioni 10×10 (inizio 200, 250) si ha:

C

-0.0107	-0.0073	0.0050	-0.0109	0.0468	-0.1132	0.2763	0.9531
0.0456	0.0370	-0.0026	-0.0073	-0.1657	0.0403	-0.9409	0.2865
0.0539	0.0159	-0.0976	0.2129	-0.2063	0.9376	0.1071	0.0942
-0.3551	-0.2802	0.0574	-0.0203	0.8425	0.2367	-0.1585	0.0260
0.0238	0.1626	0.5147	-0.8105	-0.0462	0.2188	0.0324	0.0084
0.6406	0.5589	-0.2546	-0.0467	0.4561	0.0407	-0.0240	0.0017
-0.3102	0.0186	-0.8019	-0.5017	-0.0882	0.0276	0.0086	0.0003
-0.6014	0.7620	0.1199	0.2078	0.0001	-0.0128	-0.0017	-0.0002

S%

62.0	26.6	10.1	1.1	0.2	0
------	------	------	-----	-----	---

La Figura 23 riporta lo scatter plot e la distribuzione dei punti; la Figura 24 mostra le mappe RGB ottenute con selezione automatica e manuale.

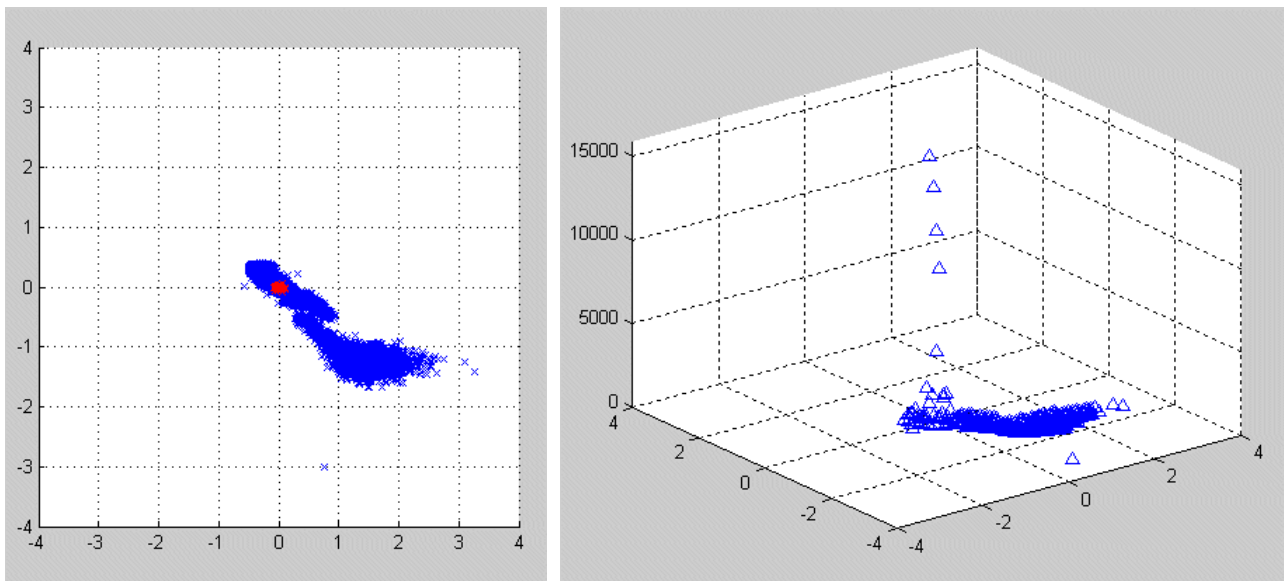


Figura 23. VR2, ROI di apprendimento di dimensioni 10, inizio 200, 250. A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).

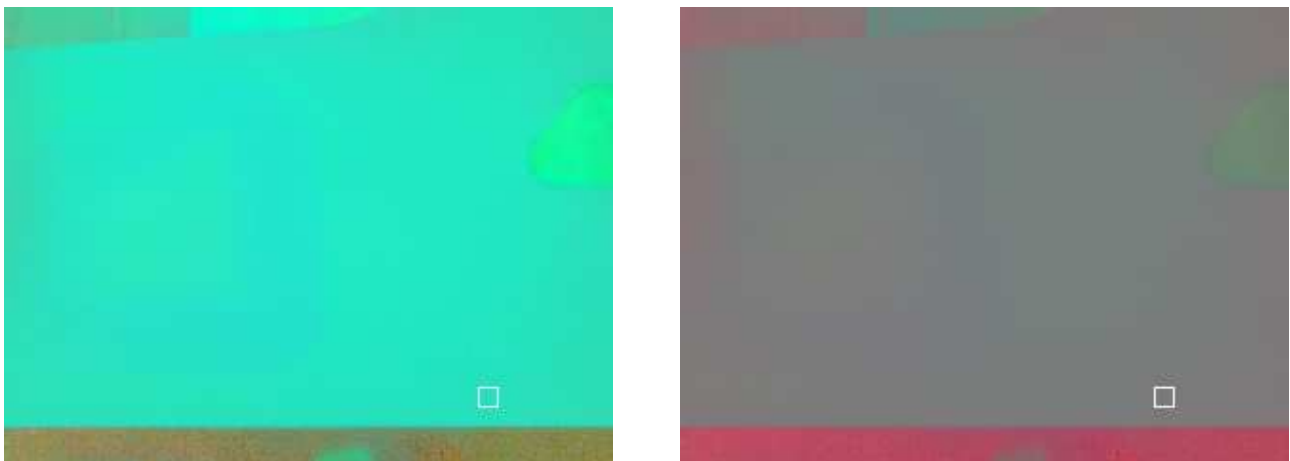


Figura 24. VR2, ROI di apprendimento di dimensioni 10×10 , inizio 200, 250. A sinistra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -0.568 + 3.255$, $G = -3.017 + 0.408$, $B = -1.207 + 0.419$); a destra: mappa d'uscita RGB con selezione manuale ($R = G = B = -3.017 + 3.255$). Il riquadro sulle mappe individua la ROI di apprendimento.

Usando una ROI con dimensioni 10×10 (inizio 100, 200) si ha:

C

0.0138	0.0053	-0.0024	0.0081	-0.0449	0.1202	0.2716	-0.9537
-0.0607	-0.0148	-0.0103	0.0144	0.1663	-0.0763	-0.9385	-0.2855
-0.0613	-0.0564	0.0883	-0.1923	0.1827	-0.9422	0.1377	-0.0912
0.4595	0.1331	0.0399	-0.0215	-0.8361	-0.2122	-0.1560	-0.0248
-0.0720	0.1872	-0.5424	0.7865	-0.0086	-0.2133	0.0379	-0.0076
-0.7889	-0.3771	0.0388	0.0333	-0.4811	-0.0261	-0.0257	-0.0013
0.2524	-0.5136	0.6004	0.5527	0.0763	-0.0260	0.0094	-0.0002
0.2999	-0.7334	-0.5783	-0.1928	0.0223	0.0135	-0.0017	0.0003

S%

65.1 21.3 12.3 0.8 0.4 0

La Figura 25 riporta lo scatter plot e la distribuzione dei punti; la Figura 26 mostra le mappe RGB ottenute con selezione automatica e manuale.

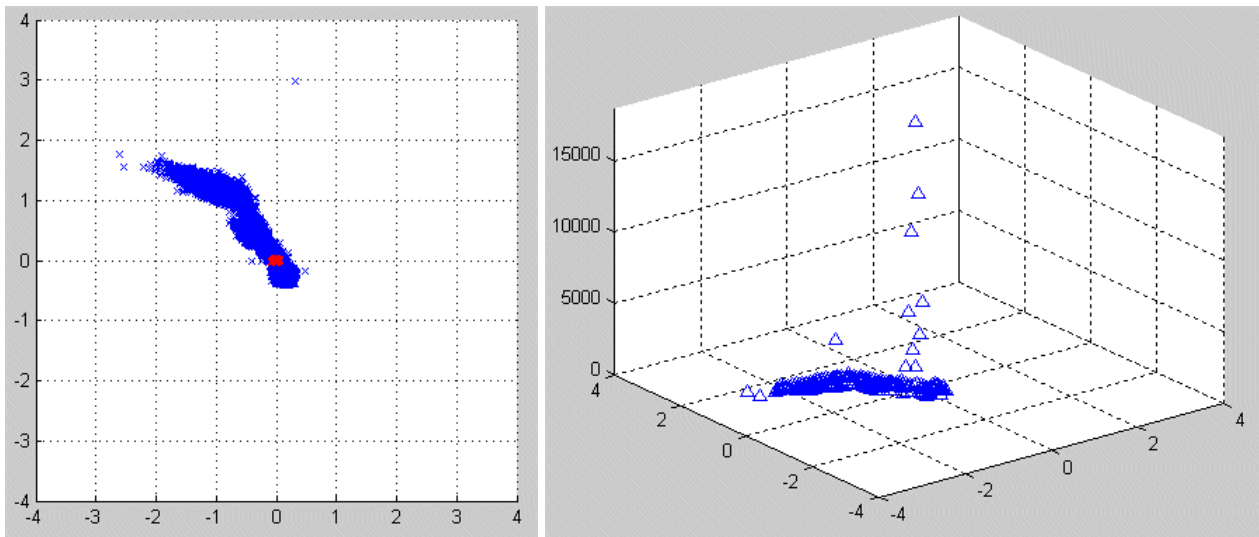


Figura 25. VR2, ROI di apprendimento di dimensioni 10×10 , inizio 100, 200. A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).

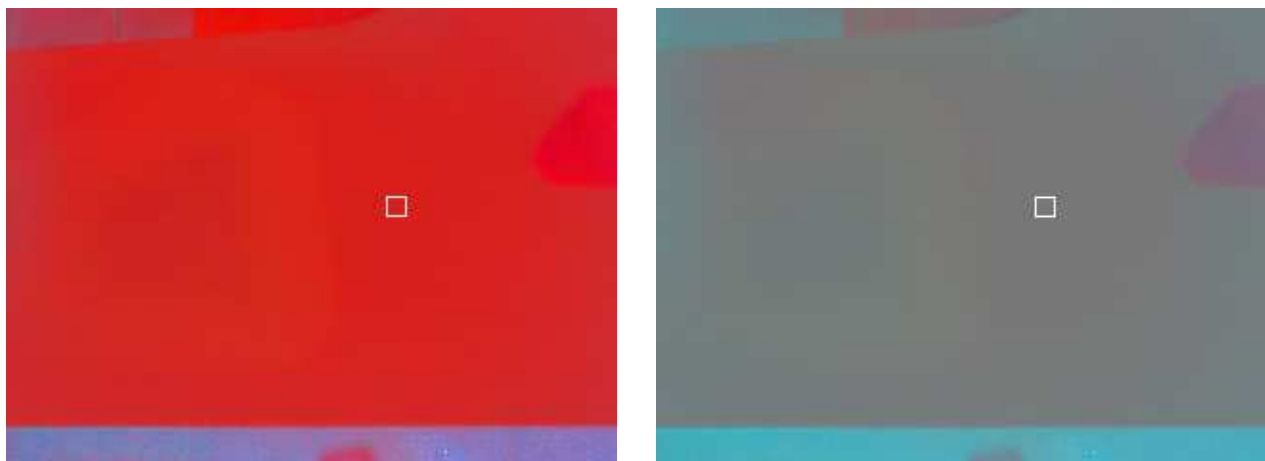


Figura 26. VR2, ROI di apprendimento di dimensioni 10×10 , inizio 100, 200. A sinistra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -2.617 \div 0.480$, $G = -0.418 \div 2.986$, $B = -0.267 \div 2.205$); a destra: mappa d'uscita RGB con selezione manuale ($R = G = B = -2.617 \div 2.986$). Il riquadro sulle mappe individua la ROI di apprendimento.

La tabella 7 riporta le medie e le varianze calcolate sul volume VR2a, definito da una ROI con dimensioni 10×10 (inizio 200, 250) sulla matrice dei dati del caso 1. La tabella riporta i parametri calcolati su ciascuna colonna della matrice A dei dati d'ingresso e delle matrici B dei dati d'uscita ottenuti con tre differenti ROI di apprendimento:

- ROI1: 240×320 (tutta la matrice)
- ROI2: 10×10 (inizio 200, 250)
- ROI3: 10×10 (inizio 100, 200)

Poiché il volume VR2 ha dimensione 8, le matrici A e B sono costituite da 100 righe di 8 colonne.

La figura 27 riporta gli istogrammi dei valori delle prime tre componenti principali, ottenuti coi tre modi di apprendimento sopra citati.

La tabella 8 riporta le medie e le varianze calcolate sul volume VR2b, definito da una ROI con dimensioni 10×10 (inizio 100, 200) sulla matrice dei dati del caso 1.

La figura 28 riporta gli istogrammi dei valori delle prime tre componenti principali, ottenuti coi tre modi di apprendimento.

	A							
Medie	-0.002	0.008	0.017	-0.067	-0.022	0.114	-0.388	0.231
Varianze	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001

ROI1	B1							
Medie	0.117	0.008	0.019	-0.016	-0.003	-0.001	0.000	0.000
Varianze	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

ROI2	B2							
Medie	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000
Varianze	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

ROI3	B3							
Medie	-0.040	0.099	0.113	0.039	-0.003	-0.003	0.000	-0.000
Varianze	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabella 7. Parametri statistici relativi al volume VR2a (10 × 10; inizio 200, 250).

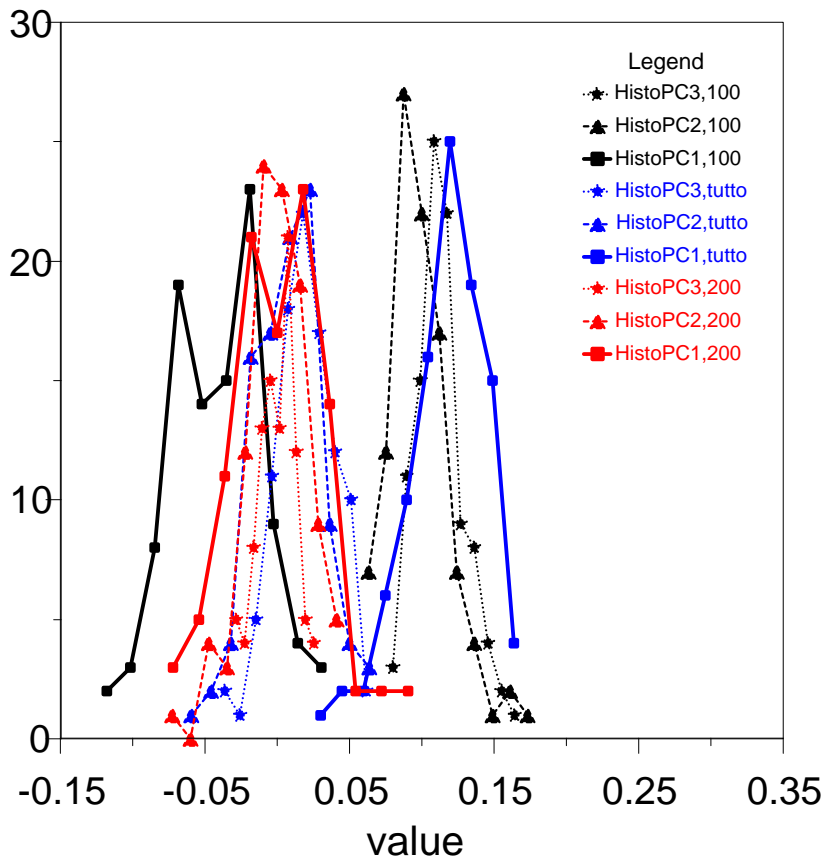


Figura 27. Volume VR2a (10 × 10; inizio 200, 250). Istogrammi dei valori di PCA1, PCA2, PCA3 ottenuti dopo l'apprendimento su: ROI1: 240 × 320 (tutta la matrice), ROI2: 10 × 10 (inizio 200, 250), ROI3: 10 × 10 (inizio 100, 200).

	A							
Medie	-0.002	0.008	0.016	-0.069	-0.014	0.113	-0.416	0.388
Varianze	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

ROI1	B1							
Medie	0.273	-0.015	-0.009	-0.014	-0.004	-0.001	0.000	0.000
Varianze	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

ROI2	B2							
Medie	-0.086	0.120	0.046	0.040	0.001	-0.003	-0.000	-0.000
Varianze	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

ROI3	B3							
Medie	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000
Varianze	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabella 8. Parametri statistici relativi al volume VR2b.

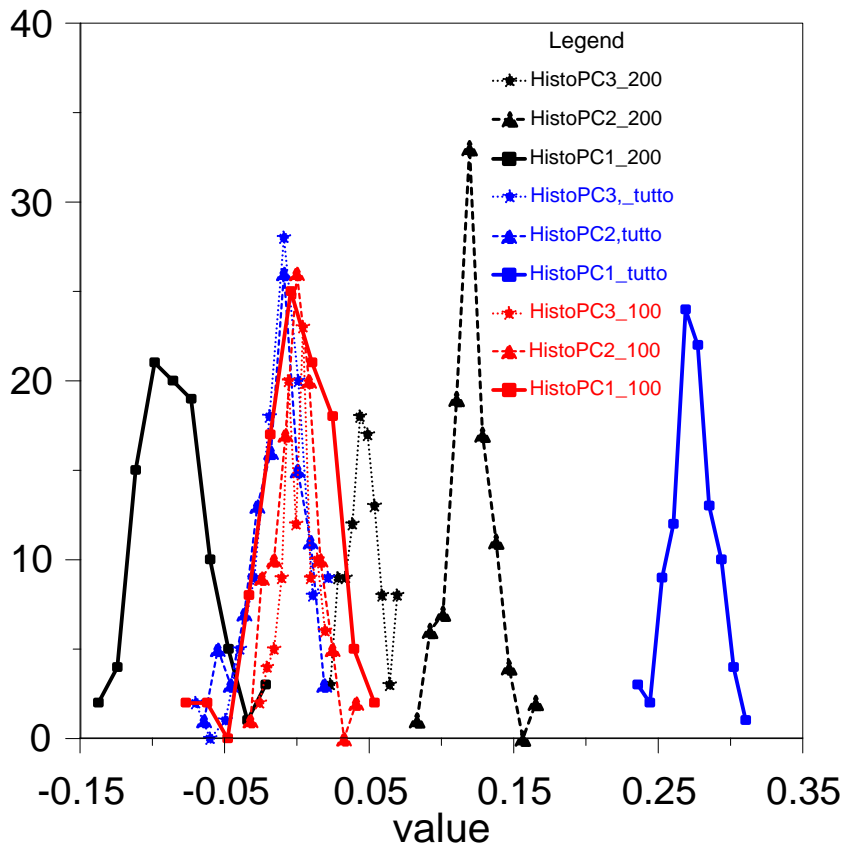


Figura 28. Volume VR2b (10 × 10; inizio 100, 200). Istogrammi dei valori di PCA1, PCA2, PCA3 ottenuti dopo l'apprendimento su: ROI1: 240 × 320 (tutta la matrice), ROI2: 10 × 10 (inizio 200, 250), ROI3: 10 × 10 (inizio 100, 200).

Ponendo $i = 23, 24, \dots, 216$, dal volume iniziale VR2 si ricava il sottovolume VR2c con dimensioni $193 \times 320 \times 8$; eseguendo l'apprendimento su VR2c si ha:

C

0.9742	0.0007	0.0083	0.0053	-0.0196	-0.0259	0.1168	0.1900
0.2082	-0.0065	-0.0225	-0.0351	0.0664	0.1341	-0.1380	-0.9557
0.0860	0.0056	-0.0892	0.0126	0.1774	0.0093	-0.9608	0.1727
0.0093	0.0605	0.1893	0.2928	-0.5054	-0.7628	-0.1377	-0.1359
0.0071	-0.0964	0.3957	-0.3109	-0.7061	0.4602	-0.1589	0.0428
0.0034	-0.2397	-0.2895	-0.8374	-0.0208	-0.3959	-0.0184	-0.0006
0.0006	0.1658	-0.8395	0.1724	-0.4563	0.1725	-0.0005	0.0050
0.0001	0.9498	0.1020	-0.2919	0.0344	-0.0339	-0.0018	-0.0003

S%

70.1 19.1 8.5 2.2 0.1 0

La figura 29 riporta lo scatter plot e la distribuzione dei punti; la figura 30 mostra le mappe RGB ottenute con selezione automatica e manuale.

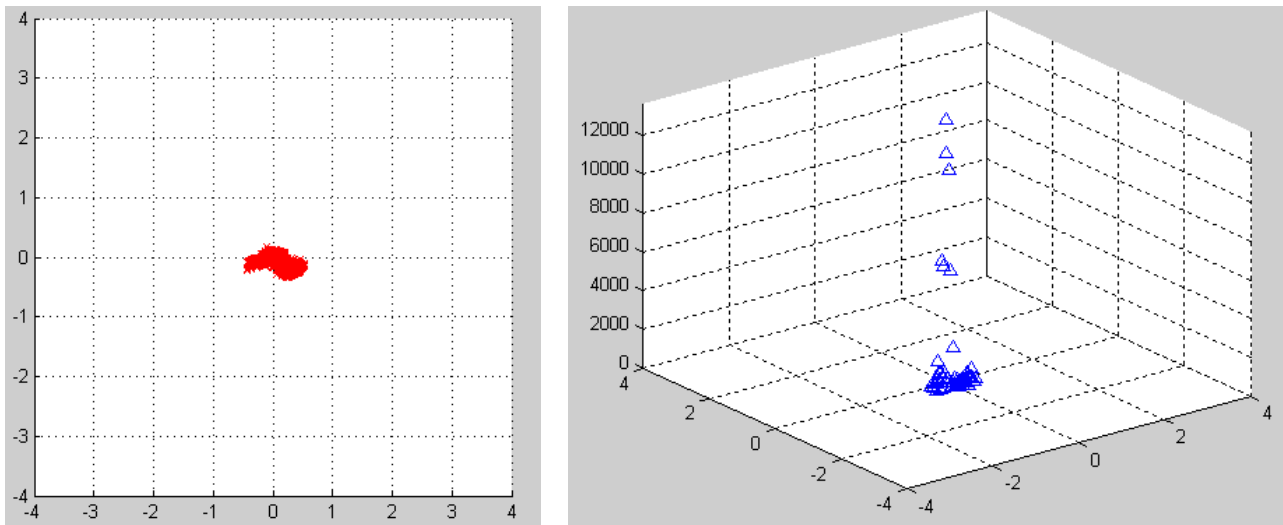


Figura 29. VR2c, ROI di apprendimento di dimensioni 193×320 . A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).



Figura 30. VR2c, ROI di apprendimento di dimensioni 193×320 . A sinistra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -0.440 \div 0.538$, $G = -0.343 \div 0.171$, $B = -0.328 \div 0.340$); a destra: mappa d'uscita RGB con selezione manuale $R = G = B = -0.440 \div 0.538$.

Se l'apprendimento è eseguito su VR2 e la rappresentazione dei dati d'uscita è limitata a VR2c si ottengono lo scatter plot e la distribuzione dei punti mostrati in figura 31 e le mappe RGB mostrate in figura 32.

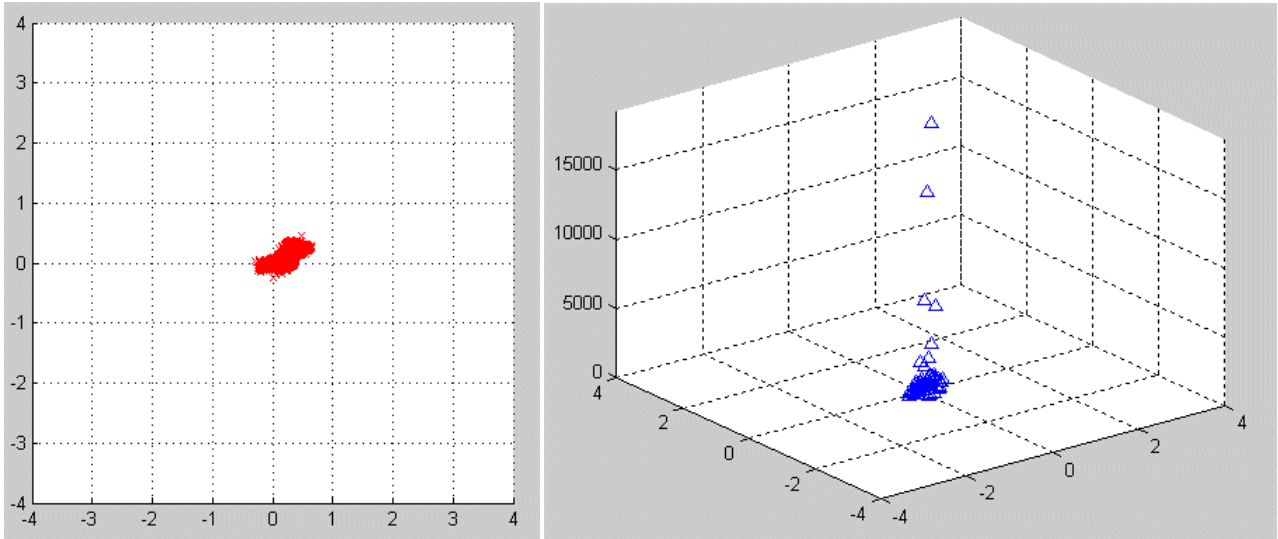


Figura 31. VR2, ROI di apprendimento di dimensioni 240×320 e dati di misura di dimensioni 193×320 . A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).

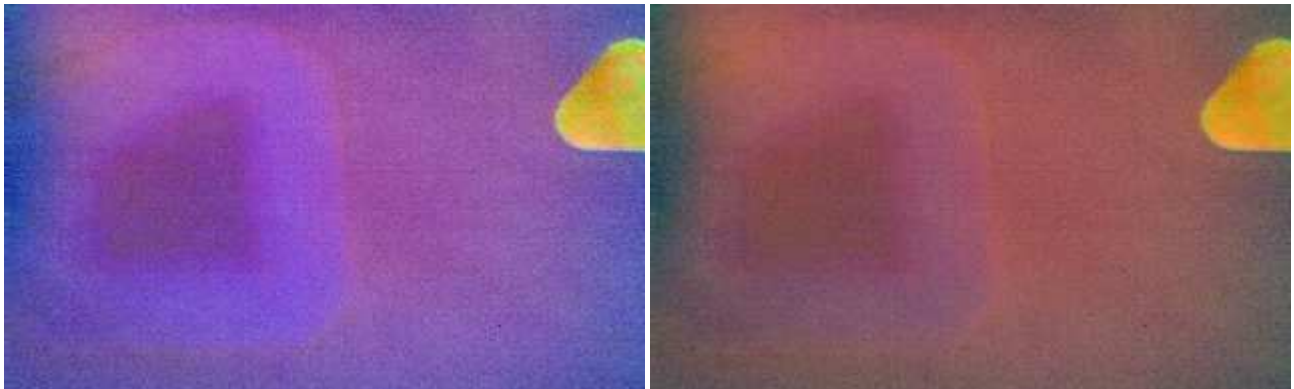


Figura 32. VR2, ROI di apprendimento di dimensioni 240×320 e dati di misura di dimensioni 193×320 . A sinistra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -0.299 + 0.645$, $G = -0.239 + 0.475$, $B = -0.343 + 0.171$); a destra: mappa d'uscita RGB con selezione manuale $R = G = B = -0.343 + 0.645$.

Caso 3: File Fogolino; dimensioni del volume VR3: $136 \times 272 \times 5$

Usando una ROI con dimensioni 136×272 si ha:

C

0.0017	0.0033	0.0214	-0.1410	-0.9900
-0.0099	-0.0190	0.0213	-0.9900	0.1410
-0.0611	-0.1390	-0.9880	-0.0207	-0.0190
0.4920	0.8570	-0.1510	-0.0240	0.0039
-0.868	0.4960	-0.0161	-0.0012	0.0000

S%

98.1 1.9 0.0 0.0 0.0

La Figura 33 riporta lo scatter plot e la distribuzione dei punti; la Figura 34 mostra le mappe RGB ottenute con selezione automatica e manuale.

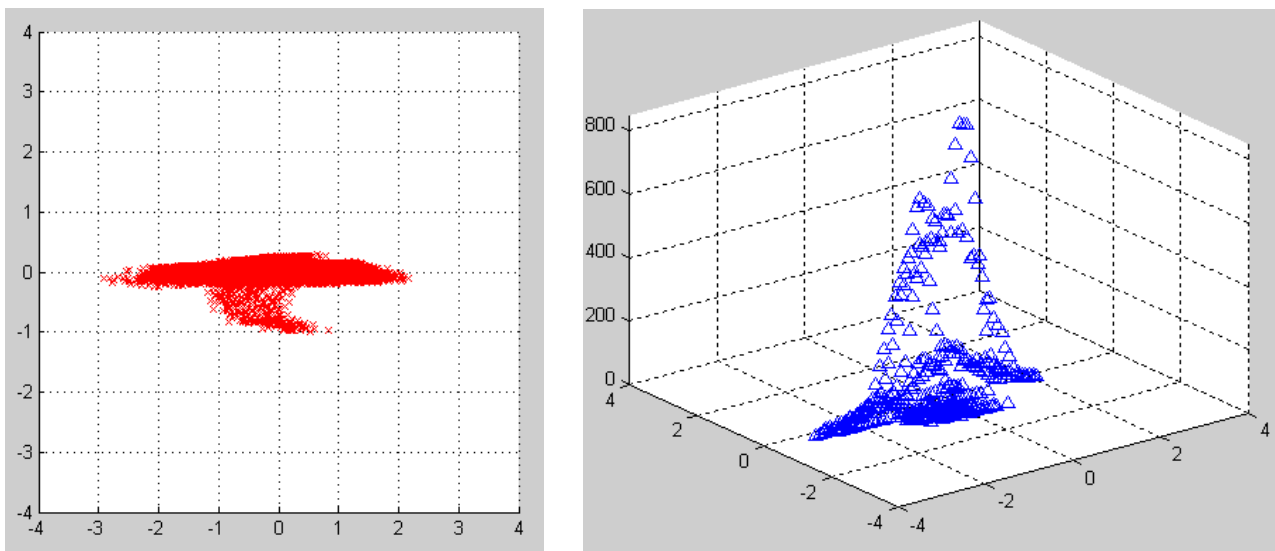


Figura 33. VR3, ROI di apprendimento di dimensioni 136×272 . A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).



Figura 34. VR3, ROI di apprendimento di dimensioni 136×272 . A sinistra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -2.921 \div 2.165$, $G = -0.998 \div 0.291$, $B = -0.035 \div 0.035$); a destra: mappa d'uscita RGB con selezione manuale ($R = G = B = -2.921 \div 2.165$).

Usando una ROI con dimensioni 10×10 (inizio 60, 60) si ha:

C

0.0016	0.0043	0.0220	0.1500	-0.9884
-0.0106	-0.0156	0.0199	0.9883	0.1504
-0.0544	-0.1840	-0.9810	0.0193	-0.0198
0.5223	0.8322	-0.1847	0.0219	0.0037
-0.8510	0.5227	-0.0509	0.0001	-0.0002

S%

99.7 0.3 0.0 0.0 0.0

La figura 35 riporta lo scatter plot e la distribuzione dei punti; la figura 36 mostra le mappe RGB ottenute con selezione automatica e manuale.

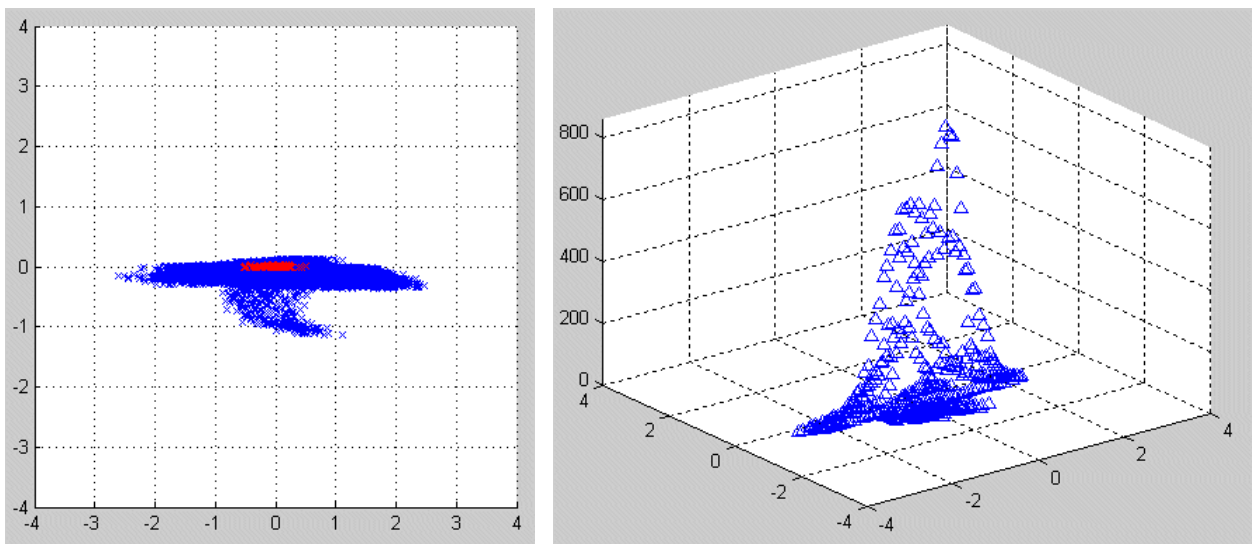


Figura 35. VR3, ROI di apprendimento di dimensioni 10×10 , inizio 60, 60. A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; i punti rossi sono ricavati dalla ROI di apprendimento; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).



Figura 36. VR3, ROI di apprendimento di dimensioni 10×10 , inizio 60, 60. A sinistra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -2.613 + 2.470$, $G = -1.146 + 0.138$, $B = -0.027 + 0.049$); a destra: mappa d'uscita RGB con selezione manuale ($R = G = B = -2.613 + 2.470$). Il riquadro sulle mappe individua la ROI di apprendimento.

Usando una ROI con dimensioni 10×10 (inizio 20, 220) si ha:

C

```

-0.0016 -0.0028  0.0233 -0.1326 -0.9909
 0.0105  0.0182  0.0292 -0.9904  0.1332
 0.0569  0.1211 -0.9904 -0.0291 -0.0198
-0.5186 -0.8443 -0.1324 -0.0244  0.0034
 0.8530 -0.5217 -0.0147 -0.0010 -0.0002
    
```

S%

99.4 0.6 0.0 0.0 0.0

La figura 37 riporta lo scatter plot e la distribuzione dei punti; la figura 38 mostra le mappe RGB ottenute con selezione automatica e manuale.

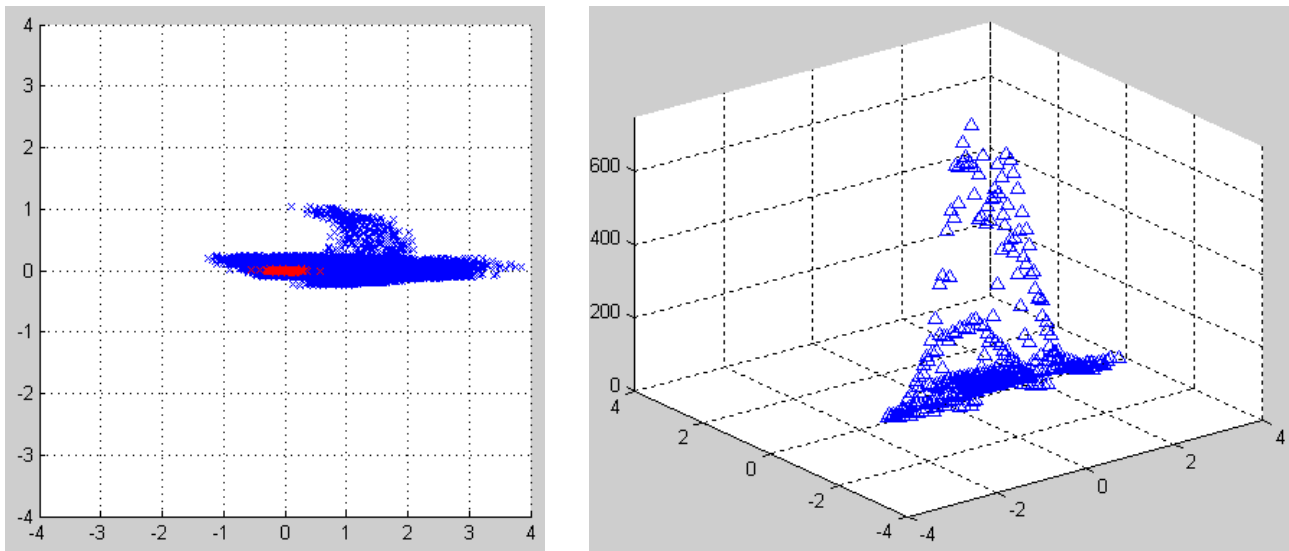


Figura 37. VR3, ROI di apprendimento di dimensioni 10×10 , inizio 20, 220. A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; i punti rossi sono ricavati dalla ROI di apprendimento; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).

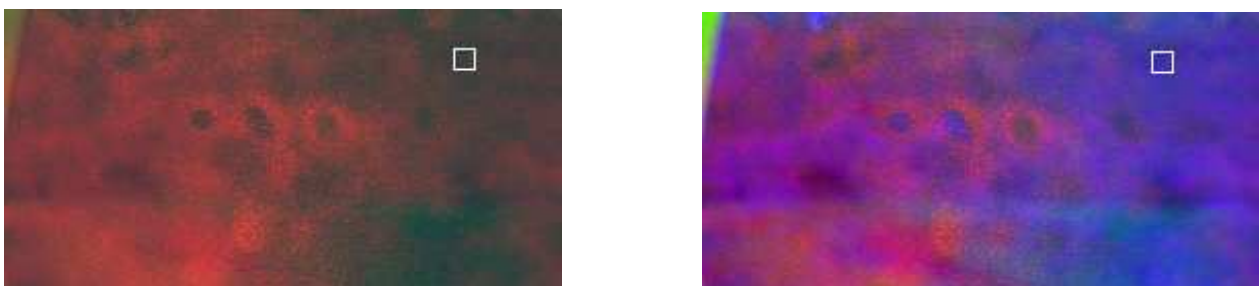


Figura 38. VR3, ROI di apprendimento di dimensioni 10×10 , inizio 20, 220. A sinistra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -1.247 + 3.837$, $G = -0.242 + 1.043$, $B = -0.053 + 0.026$); a destra: mappa d'uscita RGB con selezione manuale ($R = G = B = -1.247 + 3.837$). Il riquadro sulle mappe individua la ROI di apprendimento.

Se l'apprendimento è eseguito su VR3 e la rappresentazione dei dati d'uscita è limitata a VR3a, definito da $j = 30, 31, \dots, 270$, si ottengono lo scatter plot e la distribuzione dei punti mostrati in figura 39 e le mappe RGB mostrate in figura 40.

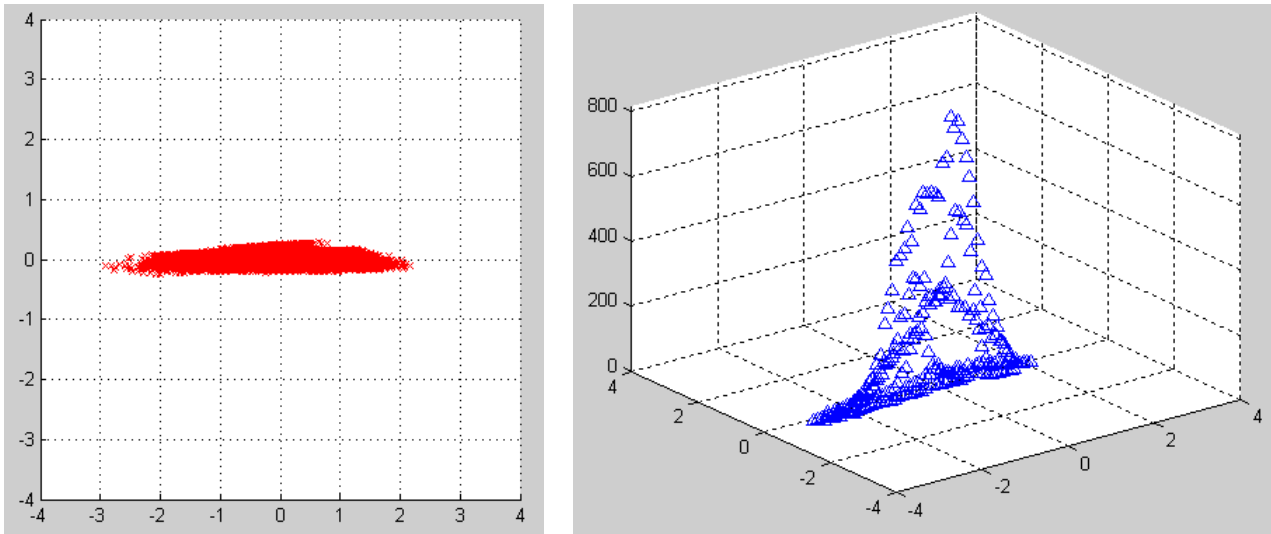


Figura 39. VR3, ROI di apprendimento di dimensioni 136×272 e dati di misura di dimensioni 193×240 . A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).



Figura 40. VR3, ROI di apprendimento di dimensioni 136×272 e dati di misura di dimensioni 193×240 . A sinistra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -2.921 \div 2.165$, $G = -0.239 \div 0.291$, $B = -0.027 \div 0.035$); a destra: mappa d'uscita RGB con selezione manuale ($R = G = B = -2.921 \div 2.165$).

Caso 4: File Piastrella; dimensioni del volume VR4: 175 × 168 × 31

La figura 41 mostra la piastrella con colori di riferimento usata in questo caso.



Figura 41. Immagine a colori reali della piastrella da cui è stato ricavato il volume di dati VR4.

Usando una ROI con dimensioni 175 × 168 (tutto il volume) si ha il vettore:

S%

77.1 16.6 3.8 2.1 2.1

La figura 42 riporta lo scatter plot e la distribuzione dei punti; la figura 43 mostra le mappe RGB ottenute con selezione automatica e manuale.

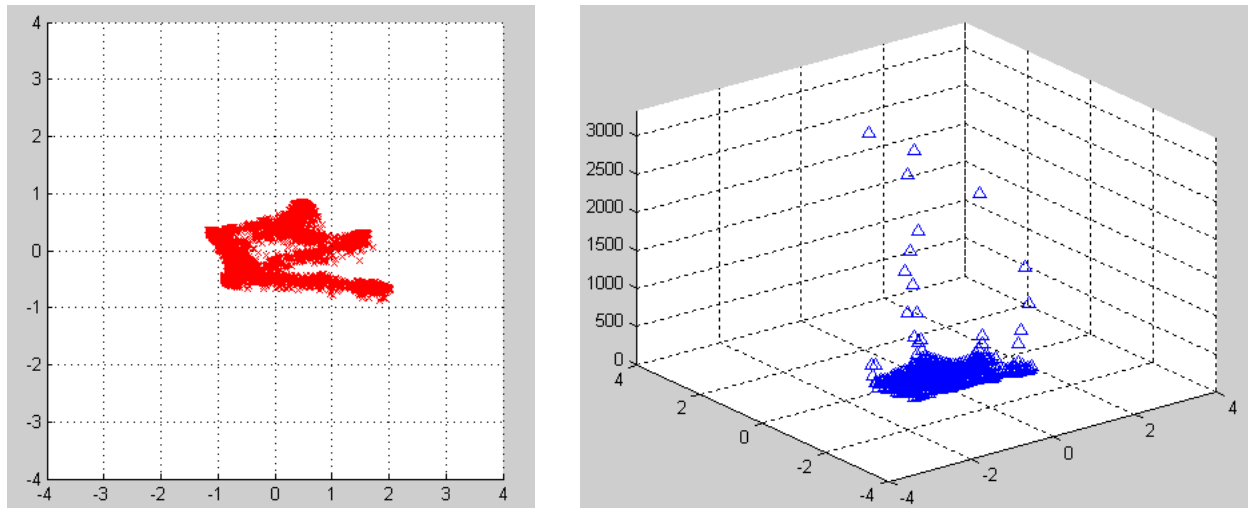


Figura 42. VR4, ROI di apprendimento di dimensioni 175×168 . A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).

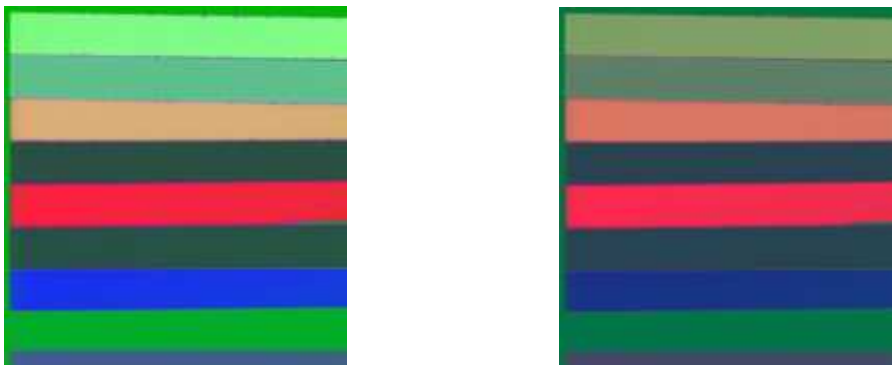


Figura 43. VR4, ROI di apprendimento di dimensioni 175×168 . A sinistra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -1.173 \div 2.030$, $G = -0.879 \div 0.861$, $B = -0.428 \div 0.592$); a destra: mappa d'uscita RGB con selezione manuale ($R = G = B = -1.173 \div 2.030$).

Usando una ROI di dimensioni 10×10 (inizio 70, 70), tutta in una zona monocolore, si ha:

S%

51.5 19.8 12.4 5.4 2.9

La figura 44 riporta lo scatter plot e la distribuzione dei punti; la figura 45 mostra le mappe RGB ottenute con selezione automatica e manuale.

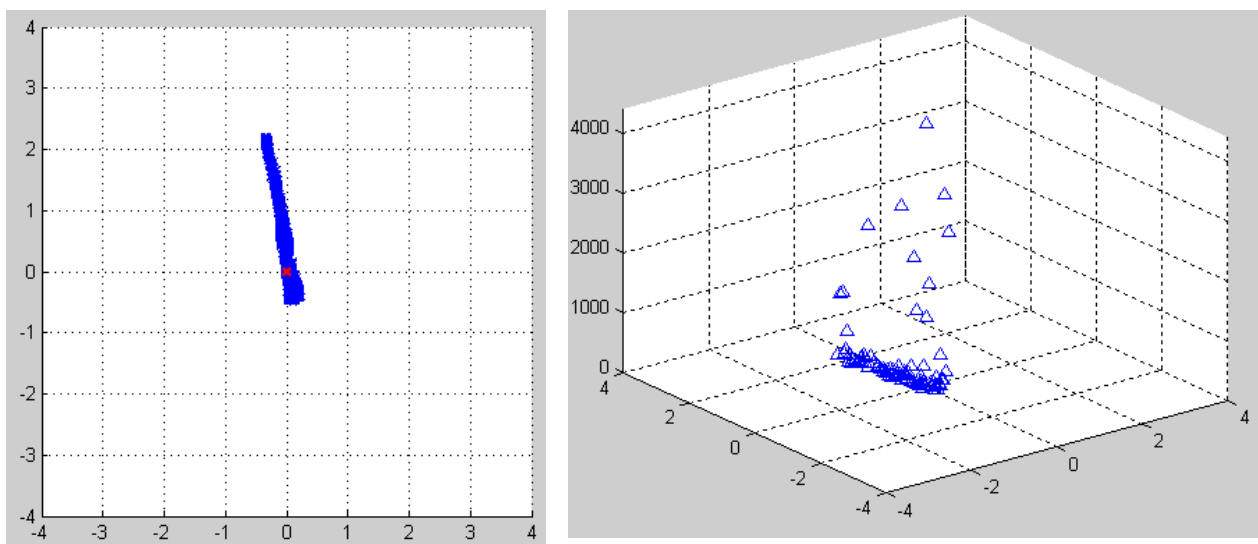


Figura 44. VR4, ROI di apprendimento di dimensioni 10×10 , inizio 70, 70. A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; i punti rossi sono ricavati dalla ROI di apprendimento; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).

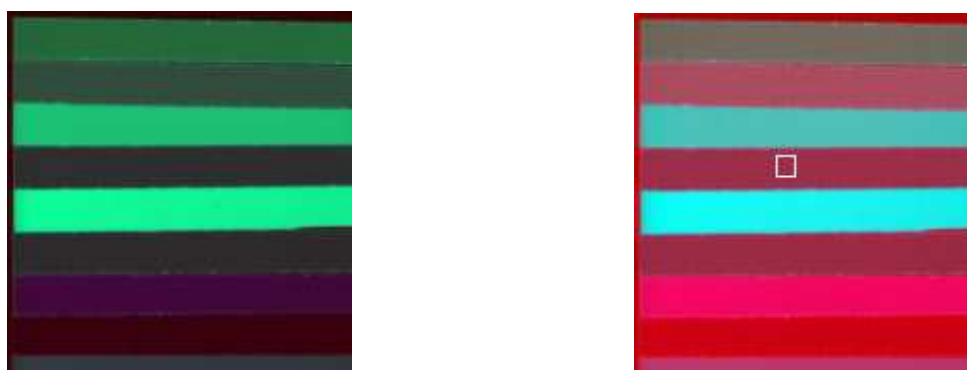


Figura 45. VR4, ROI di apprendimento di dimensioni 10×10 , inizio 70, 70. A sinistra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -0.374 \div 0.235$, $G = -0.493 \div 2.219$, $B = -0.428 \div 1.199$); a destra: mappa d'uscita RGB con selezione manuale ($R = G = B = -0.493 \div 2.219$).

Usando una ROI con dimensioni 10×10 (inizio 80, 110), a cavallo tra due colori, si ha:

S%

99.8 0.2 0 0 0

La figura 46 riporta lo scatter plot e la distribuzione dei punti; la figura 47 mostra le mappe RGB ottenute con selezione automatica e manuale.

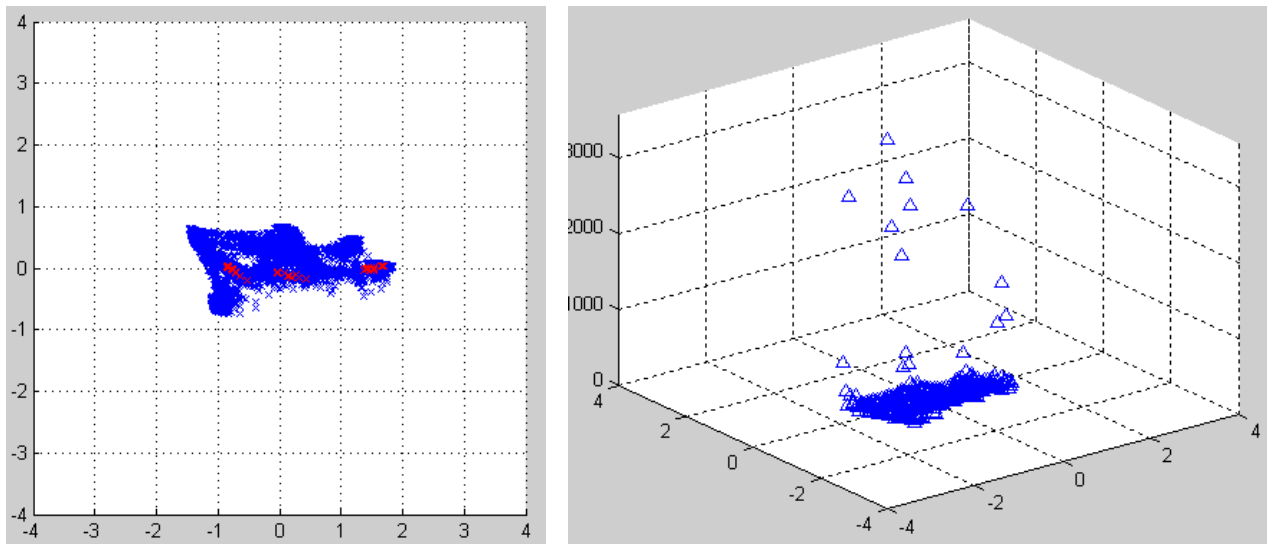


Figura 46. VR4, ROI di apprendimento di dimensioni 10×10 , inizio 80, 110. A sinistra: scatter plot dei dati d'uscita; i punti rossi sono ricavati dalla ROI di apprendimento; a destra: distribuzione quantitativa dei punti (assi PCA1 e PCA2).

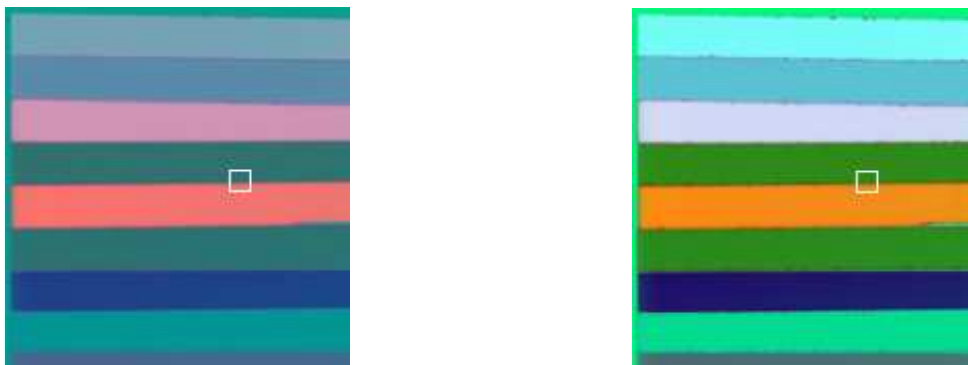


Figura 47. VR4, ROI di apprendimento di dimensioni 10×10 , inizio 80, 110. A sinistra: mappa d'uscita RGB con selezione automatica degli estremi di proiezione ($R = -1.457 + 1.843$, $G = -0.738 + 0.667$, $B = -0.101 + 0.913$); a destra: mappa d'uscita RGB con selezione manuale ($R = G = B = -1.457 + 1.843$).

Classificazioni

In questo paragrafo si riportano alcuni risultati ottenuti eseguendo una classificazione binaria o multipla sui casi riportati in precedenza.

La classificazione è di tipo puntuale, basata su una segmentazione dello spazio dei dati d'uscita rispetto al sistema di riferimento costituito dalle prime tre componenti principali, e produce una mappa i cui pixel possono assumere un insieme predefinito di valori.

Mappa binaria

Le mappe di classificazione binaria sono ottenute mediante la definizione di un parallelepipedo di lati $2R_T$, $2G_T$, $2B_T$. I dati d'uscita, definiti dalle coordinate R, G, B sono classificati come interni o esterni al parallelepipedo, e di conseguenza si costruisce una mappa i cui pixel possono avere i seguenti valori:

condizione	colore
$ R \leq R_T$	BIANCO
$ G \leq G_T$	
$ B \leq B_T$	
altrimenti	NERO

Le figure 48 e 49 riportano esempi ricavati dal File Poro 5s ll8; le figure 50 e 51 riportano esempi ricavati dal File Fogolino.

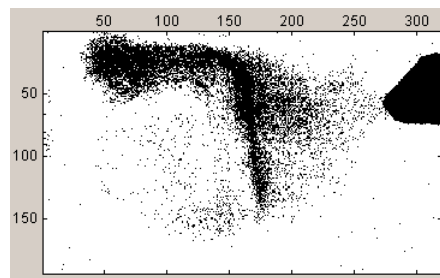


Figura 48. Mappa binaria del caso 1, File Poro 5s ll8; dimensioni del sottovolume VR1c: $193 \times 320 \times 8$.
Valori di soglia: $R_T = 0.28$, $G_T = 0.1$, $B_T = 0$

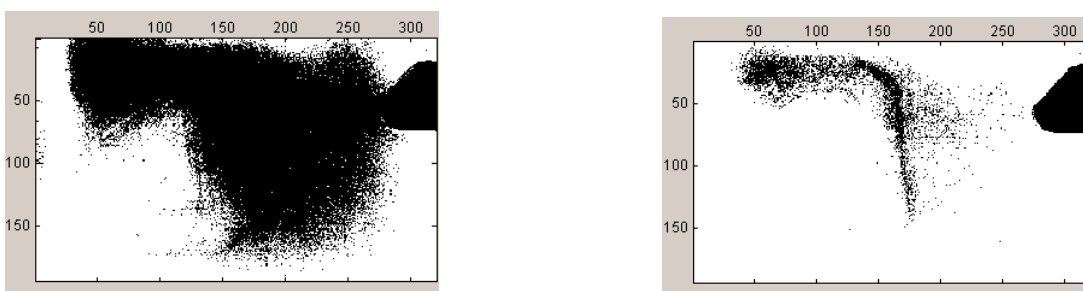


Figura 49. Mappa binaria del caso 1, File Poro 5s ll8; dimensioni del sottovolume VR1c: $193 \times 320 \times 8$.
Valori di soglia: a sinistra $R_T = 0.2$, $G_T = 0.2$, $B_T = 0.15$; a destra $R_T = 0.2$, $G_T = 0.3$, $B_T = 0.15$.

Caso 2, File Fogolino; dimensioni del volume VR2: $136 \times 272 \times 5$

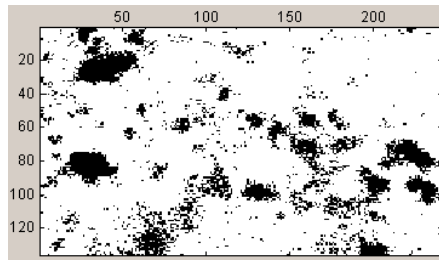


Figura 50. Mappa binaria del caso 2, File Fogolino; dimensioni del volume VR2: $136 \times 272 \times 5$.

Valori di soglia: $R_T = 1.5$, $G_T = 0.2$, $B_T = 0.01$

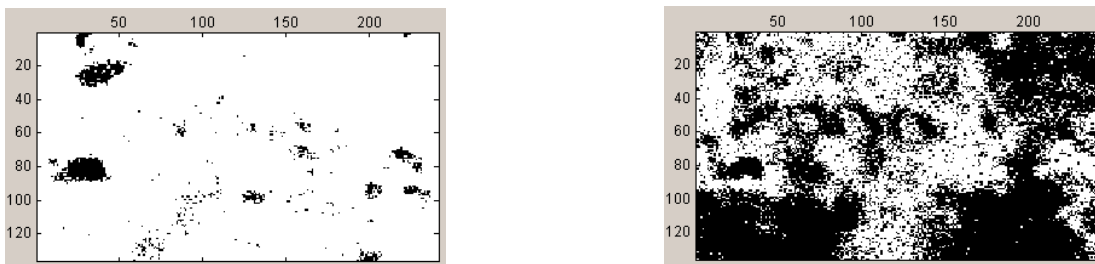


Figura 51. Mappa binaria del caso 2, File Fogolino; dimensioni del volume VR2: $136 \times 272 \times 5$.

Valori di soglia: a sinistra $R_T = 2$, $G_T = 0.2$, $B_T = 0.015$; a destra $R_T = 0.5$, $G_T = 0.2$, $B_T = 0.02$.

Mappa a colori

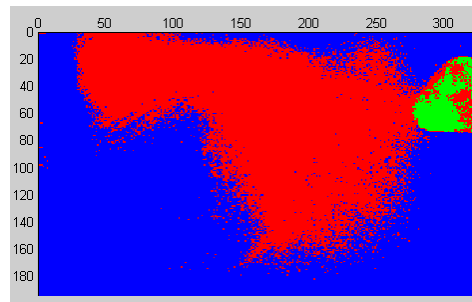
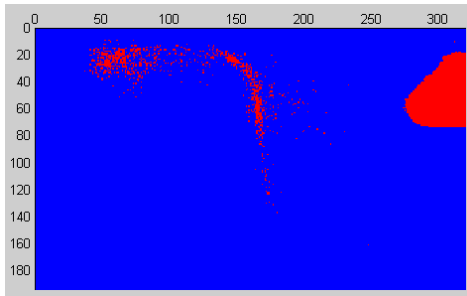
Le mappe di classificazione multipla con $N = 2, 3, 4$ o 8 colori sono ottenute in questo modo:

- Gli intervalli $[L_{\min}, L_{\max}]$ delle prime due componenti sono suddivisi in N sotto-intervalli di dimensione $\Delta L = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{N}$
- Si determina così per ogni pixel l'appartenenza ad un sotto-intervallo per la prima componente e ad sotto-intervallo per la seconda componente: al pixel viene quindi assegnata l'appartenenza all'intervallo j più lontano dal valore L_{\min} .

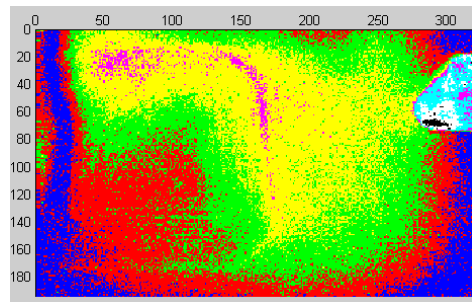
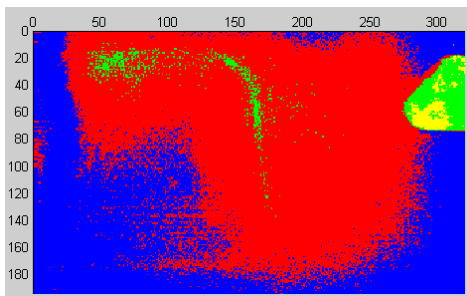
Il pixel viene rappresentato mediante la seguente scala di colori, a partire dall'origine $[0,0]$:

j	colore
1	BLU
2	ROSSO
3	VERDE
4	GIALLO
5	VIOLA
6	CIANO
7	BIANCO
8	NERO

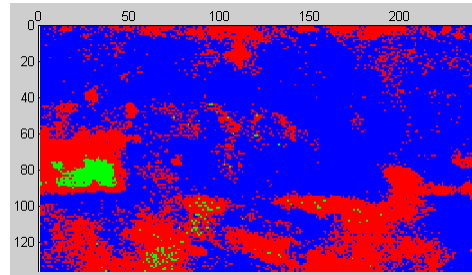
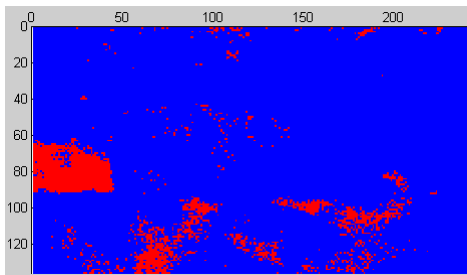
Le figure 52, 53 riportano esempi ricavati dal File Poro 5s ll8; le figure 54, 55 riportano esempi ricavati dal File Fogolino.



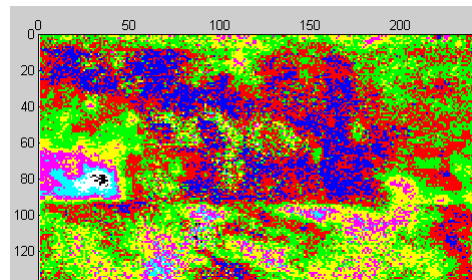
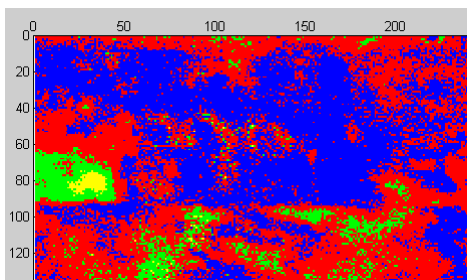
**Figura 52. Mappa a colori del caso 1, File Poro 5s l18; dimensioni del sottovolume VR1: $193 \times 320 \times 8$.
A sinistra 2 colori, a destra 3 colori.**



**Figura 53. Mappa a colori del caso 1, File Poro 5s l18; dimensioni del sottovolume VR1: $193 \times 320 \times 8$.
A sinistra 4 colori, a destra 8 colori.**



**Figura 54. Mappa a colori del caso 2, File Fogolino; dimensioni del volume VR2: $136 \times 272 \times 5$.
A sinistra 2 colori, a destra 3 colori.**



**Figura 55. Mappa a colori del caso 2, File Fogolino; dimensioni del volume VR2: $136 \times 272 \times 5$.
A sinistra 4 colori, a destra 8 colori.**

Discussione e conclusioni

Come indicato dall'equazione 1, la matrice dei dati d'uscita B è ottenuta mediante il prodotto della matrice dei dati d'ingresso normalizzati a valor medio nullo A' per la matrice delle componenti principali C: di conseguenza, i dati delle matrici d'uscita B hanno valore medio nullo.

Per quanto riguarda i dati di sintesi si può notare che le tabelle 1 e 2 hanno gli stessi dati d'uscita, in quanto i rispettivi insiemi dei dati d'ingresso differiscono di una costante additiva; la stessa situazione è riscontrabile considerando le tabelle 3 e 5. Infine, i dati d'ingresso di tabella 6 sono ottenuti da quelli di tabella 1 mediante una moltiplicazione per una costante: i dati d'uscita di tabella 6 differiscono da quelli di tabella 1 per la costante moltiplicativa.

In generale, per ciascuna delle tabelle A dei dati di sintesi si ha:

$$a_{m,n} = a_m \quad \forall n$$

dove a_m è il valore costante degli elementi della m-esima riga.

Per ciascuna delle matrici C si ha:

$$c_{m,1} = k_1 \quad \forall m$$

dove k_1 è il valore costante degli elementi della prima colonna. Si ha inoltre:

$$\sum_m c_{m,n} = \begin{cases} 5 \times k_1 & \text{per } n = 1 \\ 0 & \text{per } n \neq 1 \end{cases}$$

Gli elementi delle matrici d'uscita B sono dati da:

$$b_{m,n} = \sum_j a'_{m,j} c_{j,n} = \sum_j (a_{m,j} - s_j) c_{j,n} = \sum_j a_{m,j} c_{j,n} - \sum_j s_j c_{j,n}$$

dove s_j è la media di colonna.

Per gli esempi considerati si ha:

$$5 \times k_1 (a_m - s_1) \quad \text{per } n = 1$$

$$b_{m,n} = a_m \sum_j c_{j,n} =$$

0

per $n \neq 1$

Se si considerano il vettore costituito dalla prima colonna di A, ed il vettore costituito dalla prima colonna di B, si ha una relazione lineare tra la variabile d'uscita (prima componente principale) e quella d'ingresso:

$$b_{m,1} = (5 \cdot k_1) a_{m,1} - (5 \cdot k_1) s_1 = m a_{m,1} + c$$

dove m è il coefficiente angolare della retta e c è l'intercetta. Questa relazione è visibile osservando i grafici di figura 10. In figura si nota anche che le rette hanno tutte lo stesso coefficiente angolare, con valore $m = 2,236066$.

I comportamenti sopra descritti, che dipendono dalla linearità della trasformata, indicano la necessità di trattare in modo adeguato i dati, soprattutto per quanto riguarda la generazione delle mappe pittoriche: si possono infatti ottenere mappe identiche quando i dati differiscono per una costante additiva o moltiplicativa, e si possono quindi perdere informazioni utili presenti nei dati d'ingresso.

Le matrici A ricavate dai dati di sintesi dei casi 7 ÷ 10 sono costituite da 1600 righe di 5 elementi eguali tra loro. Si hanno 200 righe con valore $a = 5$ e 1400 righe con $a = 215$ ed il valore medio per ciascuna colonna della tabella vale quindi:

$$m = \frac{1}{1600} \times (215 \times 1400 + 5 \times 200) = 188,75$$

Si ha dunque:

$$k_1 = 26,25$$

$$a' =$$

$$k_2 = -183,75$$

Gli elementi delle matrici d'uscita B sono dati da:

$$b_{m,n} = \sum_j a'_{m,j} c_{j,n} = k_1 \times \sum_j c_{j,n} - k_2 \times \sum_j c_{j,n}$$

Per tutte le matrici C si ha:

$$\sum_j c_{j,n} = 0 \text{ per } n \neq 1$$

Per le matrici dei casi 7,9,10 si ha $\sum_j c_{j,n} = -2.236$ e di conseguenza i valori possibili dei dati d'uscita sono:

$$b_{m,n} = \begin{aligned} &+26,25 \cdot -2.236 = -58.695 \\ &-183,75 \times -2.236 = 410.865 \end{aligned}$$

per $n=1$, e:

$$b_{m,n} = 0$$

per $n \neq 1$.

Gli scatter plot relativi ai casi 7,9,10 sono dunque identici tra loro e contengono 200 punti alle coordinate $PC1 = 410,865$, $PC2 = 0$ e 1400 punti alle coordinate $PC1 = -58,695$, $PC2 = 0$; il baricentro di questi punti coincide con l'origine degli assi PCA.

Per la matrice del caso 8 si ha $\sum_j c_{j,n} = 2.236$ e di conseguenza i valori possibili dei dati d'uscita sono:

$$b_{m,n} = \begin{aligned} &+26,25 \cdot 2.236 = 58.695 \\ &-183,75 \cdot 2.236 = -410.865 \end{aligned}$$

per $n=1$, e:

$$b_{m,n} = 0$$

per $n \neq 1$.

Lo scatter plot relativo al caso 8 contiene 200 punti alle coordinate $PC1 = -410.865$, $PC2 = 0$ e 1400 punti alle coordinate $PC1 = 58,695$, $PC2 = 0$; anche in questo caso il baricentro dei punti coincide con l'origine degli assi PCA.

In tutti i casi considerati si ottengono mappe d'uscita RGB di tipo binario; i punti d'ingresso con lo stesso valore sono rappresentati nelle mappe d'uscite con lo stesso colore quando le matrici di trasformazione sono identiche (casi 7,9,10); in ogni caso, il contrasto tra i punti delle due specie rimane costante.

Per quanto riguarda i dati ottenuti nel corso di misure con differenti tecniche, normalmente sia gli elementi delle matrici d'ingresso, sia quelli delle matrici d'uscita sono diversi tra loro e non si hanno quindi le relazioni lineari trovate in precedenza; anche considerando la distanza dall'origine di ciascun elemento delle tabelle si ottiene una scarsa correlazione tra dati d'ingresso e dati d'uscita (dati non riportati).

Esaminando i risultati relativi al secondo esempio (File Poro) si vede che se si cambia la ROI di apprendimento si ottengono differenti matrici di trasformazione B e differenti vettori di varianze percentuali S; si nota inoltre che la varianza associata alla

PCA1 è massima quando si usa come ROI di apprendimento l'intero volume dei dati (97.3% rispetto a 62.0% e 65.1% ottenute coi ROI di dimensioni 10×10).

Gli scatter plot riportati nelle figure 21, 23 e 25 mostrano che al variare della ROI di apprendimento si modificano le distribuzioni dei punti sul piano delle due prime componenti principali e di conseguenza variano anche gli estremi degli intervalli di esistenza delle componenti stesse: ciò spiega le differenti tonalità cromatiche delle mappe RGB riportate nelle figure 22, 24 e 26. La forma geometrica della distribuzione nel piano PCA1, PCA2 rimane però sostanzialmente la stessa: ciò spiega il fatto che nelle varie immagini si individuano sostanzialmente gli stessi dettagli, rappresentati con differenti colori.

I diagrammi della distribuzione quantitativa dei punti, riportati nelle figure 21, 23 e 25, mostrano che si ha un elevato numero di punti addensati in prossimità dell'origine del diagramma: ciò comporta che se si scelgono i valori estremi delle scale per la rappresentazione RGB in base alla presenza dei punti sul piano PCA e non alla loro effettiva distribuzione, si possono ottenere mappe con scarsi dettagli nelle presunte zone d'interesse. Questo comportamento risulta esaltato se gli estremi delle scale vengono scelti con selezione manuale, imponendo un solo valore per tutti, anziché essere ottimizzati mediante la selezione automatica: i risultati possono essere agevolmente osservati confrontando le mappe riportate nelle figure 22, 24 e 26.

La Tabella 7 riporta i parametri statistici calcolati sui dati d'uscita relativi allo stesso volume VR2a, definito dalla ROI con dimensioni 10×10 e inizio 200, 250 dopo le trasformazioni ottenute con differenti ROI di apprendimento. Esaminando la tabella 7 e l'associata figura 27, si nota che i dati d'uscita hanno valor medio nullo quando la ROI di apprendimento coincide con VR2a ed hanno invece valor medio diverso da zero quando si usano altre ROI: ciò è dovuto al fatto che trasformazione determina il valore medio sull'insieme dei dati di apprendimento. Le variazioni ottenute sono comunque molto piccole rispetto alla dimensione dell'intervallo usato per la rappresentazione RGB; si ha infatti:

apprendimento con ROI2: valor medio 0, intervallo complessivo $-2.617 \div 0.485$

apprendimento con ROI1: valor medio 0.117, intervallo complessivo $-3.488 \div 0.729$

apprendimento con ROI3: valor medio -0.040, intervallo complessivo $-0.586 \div 3.255$

Ciò spiega perché nelle mappe RGB, che rappresentano l'intero volume VR2, si notano praticamente gli stessi dettagli anche se la ROI di apprendimento viene variata.

Un comportamento simile è osservabile considerando i dati d'uscita relativi al volume VR2b, definito dalla ROI con dimensioni 10×10 e inizio 100, 200: come si può vedere nella figura 28, i dati d'uscita hanno valori diversi al variare della ROI d'apprendimento, ed hanno valor medio nullo quando la ROI d'apprendimento coincide con la ROI relativa a VR2b.

Un maggior numero di dettagli è osservabile sulle mappe se il volume dei dati elaborati viene ridotto. Nell'esempio riportato, il volume ridotto VR2c è stato ricavato eliminando i dati che non appartengono al campione esaminato e che danno origine alla banda scura nella parte inferiore delle figure 22, 24 e 26, nonché ad una zona scura nella

parte superiore delle stesse. Come si può vedere nella figura 29, i dati d'uscita ottenuti in questo caso sono molto più addensati intorno all'origine del piano PCA e gli intervalli di proiezione per le mappe RGB risultano molto più piccoli rispetto al volume VR2: ciò spiega la maggiore presenza di dettagli nelle mappe RGB di figura 30. Inoltre, in questo caso le lunghezze degli intervalli di proiezione risultano abbastanza simili tra loro, in modo che i dettagli permangono anche scegliendo manualmente gli stessi estremi per le tre componenti. Esaminando il vettore S associato alla trasformazione, si nota che la varianza associata a PCA1 ha un valore intermedio (70.1%) tra quello ottenuto considerando l'intero volume VS1 (97.3%) e quelli ottenuti con ROI 10×10 (62.0% e 65.1%).

L'esaltazione dei dettagli nelle mappe può essere ottenuta anche eseguendo l'apprendimento sull'intero volume dei dati (in questo caso VR2) e rappresentando solo un sottoinsieme dei dati d'uscita. Nell'esempio riportato nelle figure 31 e 32 è stato considerato lo stesso volume VR2c definito in precedenza, ottenendo così nuovamente le mappe RGB con dimensioni 193×320 . La matrice di trasformazione C di questo esempio è ancora quella riportata per VR2 con apprendimento sull'intero volume e lo scatter plot, mostrato in figura 31, corrisponde a quello mostrato in figura 21, limitatamente alla zona circostante l'origine. Gli estremi di proiezione sono ovviamente differenti da quelli determinati per la trasformazione limitata a VR2, ma gli intervalli di proiezione hanno dimensioni paragonabili: ciò spiega la differenza dei colori tra le mappe di figura 32 e quelle di figura 31, e, al contempo, una somiglianza dei dettagli osservabili.

Il terzo esempio di dati di misura (File Fogolino) è stato trattato in maniera analoga al precedente e si sono ottenuti risultati simili. La varianza associata alla prima componente è più grande (98.1%) quando l'intero volume è preso come apprendimento, rispetto al valore ottenuto scegliendo una ROI di apprendimento con dimensioni 10×10 (99.7%).

Il quarto esempio (File Piastrella) è costituito da un oggetto con struttura nota e relativamente semplice, costituita da 8 bande orizzontali con differenti colori (vedi figura 41); due bande hanno in realtà lo stesso colore, per cui in un caso ideale, con bande perfettamente uniformi, i dati trasformati potrebbero assumere solo 7 valori diversi. Nel diagramma mostrato in figura 43 si individuano i picchi, oltre ad un insieme di punti con basso valore di occorrenza: questo fatto è dovuto alla non perfetta uniformità delle bande, alla presenza di rumore ad alle strisce sottili alle estremità superiore ed inferiore dell'oggetto esaminato. Le mappe d'uscita mostrate in figura 43 presentano, sia pure con colori falsi, l'effettiva struttura dell'oggetto esaminato. In figura 42 si può notare che i picchi di addensamento dei valori sono situati ai bordi dell'area occupata: ciò spiega il fatto che nella mappa ottenuta con selezione manuale degli estremi non si ha una perdita di dettagli rispetto a quella ottenuta con selezione automatica.

Il metodo di classificazione sviluppato è basato sulla modifica del valore dei dati d'uscita, presi singolarmente, in base alla loro distanza dall'origine del sistema di riferimento degli assi PCA, e può essere quindi assimilato ad una segmentazione delle mappe d'uscita. I risultati dipendono fortemente dai valori di soglia scelti, sia nella rappresentazione monocromatica che in quella a pseudo-colori, e non è possibile definire

un criterio per l'ottimizzazione dei risultati. I dettagli osservabili nelle immagini riportate sono già sostanzialmente presenti nelle mappe d'uscite prodotte dalla procedura.

Data la poca differenza mostrata dai risultati ottenuti prendendo la ROI di apprendimento con dimensioni eguali a quelle del volume dei dati d'ingresso e quelli ottenuti con ROI di dimensioni molto inferiori, si è eseguito un test per determinare la quantità di tempo richiesta per ottenere la stessa quantità di dati d'uscita in diverse condizioni di apprendimento.

Sono stati effettuati test con ROI di differenti dimensioni $I \times J \times N$; in particolare si è posto:

$$I = J = 10, 20, 40, 50, 100, 200$$

$$N = 0, 1, \dots, 50$$

La figura 56 mostra il grafico dei risultati: si hanno 6 curve, per le quali il tempo di calcolo (Time) è funzione del valore di N (Z dimension).

In figura si nota il tempo di calcolo necessario con ROI aventi dimensioni fino a 40×40 è basso e pressoché indipendente da N, mentre se la ROI assume dimensioni superiori, il tempo di calcolo dipende notevolmente dal valore di N.

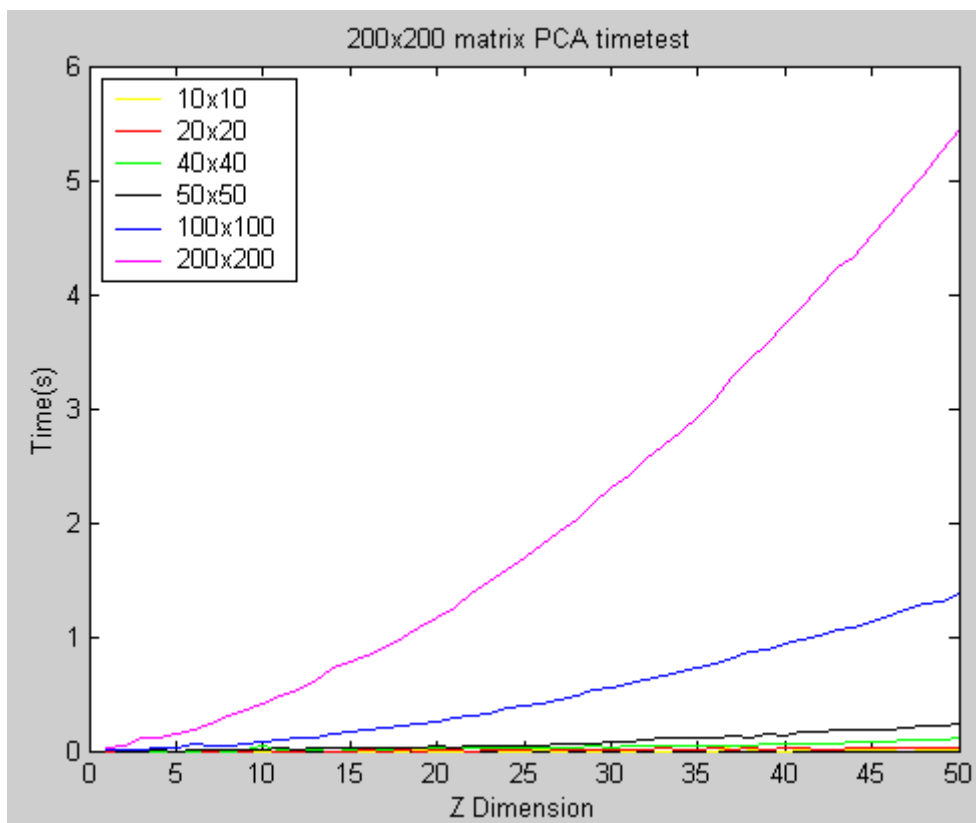


Figura 56. Grafico del confronto temporale per l'esecuzione dell'apprendimento della PCA con ROI di dimensioni variabili da 10×10 a 200×200 e variabile nel numero di coefficienti (Z) da 0 a 50.

In conclusione, la tecnica di analisi PCA può essere usata con risultati soddisfacenti per comprimere i dati costituiti da dati multivariati organizzati in matrici, ottenuti in differenti modi di misura, come ispezioni mediante sequenze d'immagini, ispezioni ad ultrasuoni con onda completa e così via: la tecnica PCA consente infatti di ricavare mappe

bidimensionali con rappresentazioni mono- o multi-cromatiche, che rappresentano in maniera sintetica alcune proprietà dell'oggetto ispezionato e permettono di localizzare alcune strutture d'interesse.

L'esperienza ottenuta elaborando differenti tipi di dati, sia costruiti artificialmente, sia ricavati da applicazioni reali, ha mostrato che può essere opportuno condizionare in qualche modo i dati da trattare, al fine di ricavare mappe con la maggiore quantità di dettagli evidenti. La procedura sviluppata si è mostrata efficiente da questo punto di vista, poiché essa offre vari strumenti per l'individuazione e la definizione di parametri per il trattamento dei dati: in particolare, risultano utili le rappresentazioni grafiche dei risultati dell'analisi (grafici PCA).

Il software realizzato può risultare efficiente quando è usato in modo interattivo, in base anche ad una qualche conoscenza del tipo di informazioni da ricercare: al variare dei parametri di elaborazione inserite si ottengono infatti differenti mappe d'uscita e si possono quindi evidenziare, o, al contrario, annullare le informazioni utili.

Il software può essere usato in modo automatico quando si vogliono confrontare dati ricavati in differenti ispezioni. In questo caso, inizialmente si esegue una fase interattiva di apprendimento, in cui si selezionano i valori dei vari parametri di soglia per ottenere i migliori risultati; successivamente, gli altri volumi di dati vengono modificati usando la matrice di trasformazione individuata nella prima fase, senza alcun intervento interattivo: al termine delle operazioni si hanno mappe ottenute tutte con la stessa trasformazione, che consentono di determinare sia mediante osservazione, sia in modo automatico, la presenza, il mantenimento o la modifica di strutture d'interesse.

Bibliografia

W. W. Cooley, P. R. Lohnes: "Multivariate Data Analysis", John Wiley, NY, 1971

L. Landini: "Elaborazione di dati e segnali biomedici", SEU, Pisa, 1996

Statistics Toolbox for MATLAB®, The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2000.

StatMost™ User's Guide, DataMost Co., 1995.