

MUSICA & FISILOGIA

TARTINI, IL TERZO SUONO E LA COCLEA



LE SONGE DE TARTINI.

On raconte que Tartini vit en songe le Diable qui lui offrait ses services, et qui, devant lui une sonate sur le violon, ravi de ce qu'il avait entendu, il essaya de se la rappeler cette singulière sonate, que l'on connaît encore aujourd'hui sous le nom de la Sonate du Diable.

PHYSIOLOGY & MUSIC

TARTINI, THE THIRD TONE AND THE COCHLEA

Gabriele Caselli, Giulio Masetti, Giovanni Cecchi

Le Songe de Tartini (Il sogno di Tartini)

Litografia di Louis-Léopold Boilly (1824)
 riferita all'aneddoto del sogno che avrebbe ispirato
 la composizione della sonata "Il trillo del diavolo"
 (Bibliothèque nationale de France).

“È fisicamente certo che dati due suoni simultanei forti e prolungati... ...si sente un terzo suono simultaneo diverso dalli dati suoni...”. Con queste parole tratte dal suo *Trattato di musica secondo la vera scienza dell'armonia* nel 1754 Giuseppe Tartini (1692-1770) celebre violinista, compositore, studioso di teoria musicale e “armonista fisico-matematico” (Barbieri, 1990) introduce la sua scoperta, effettuata alcuni anni prima (nel 1713), del cosiddetto “terzo suono”. Come spiegato da Tartini stesso, se un ascoltatore si mette a metà tra due suonatori di violino o di oboe distanti qualche passo tra loro, sente oltre alle note suonate (note principali), un altro suono chiamato da Tartini il *terzo suono*. Questo suono è più debole dei suoni principali e corrisponde a una nota più grave rispetto a quelle suonate e ha una relazione aritmetica precisa con esse. Il terzo suono è stato scoperto indipendentemente anche dal compositore e teorico musicale francese Jean-Baptiste Rameau (1683-1764), nel 1742 circa, e da Georg Andreas Sorge, organista di Amburgo (1703-1778) nel 1745 circa. Tartini però è stato il primo scopritore (Jones, 1935) ed è stato anche l'autore che più ne ha investigato le proprietà e, quindi, il terzo suono è giustamente chiamato con il suo nome.

It is physically certain that given two simultaneous loud and prolonged tones one can hear a third tone, different from the played sounds: with these words taken from his essay *Trattato di musica secondo la vera scienza dell'armonia* published in 1754 Giuseppe Tartini (1692-1770), celebrated violinist, and researcher of musical theory and “physico-mathematical harmonist” (Barbieri, 1990) introduces his discovery, made some years before (in 1713), of the so-called *third tone*. As explained by Tartini himself, if a listener stands halfway between two violin or oboe players some steps apart, he can hear another tone, in addition to the played notes (principal or primary notes), called by Tartini the *third tone*. This sound is weaker than the main tones and corresponds to a lower note than the two notes played and has a precise arithmetical relationship to them. The third tone had been discovered independently by the French composer and expert of music theory Jean-Baptiste Rameau (1683-1764), around 1742, and by the German organist Georg An-

Le Songe de Tartini (Tartini's Dream)

Litography by Louis-Léopold Boilly (1824) on
 the legend behind Giuseppe Tartini's
 "Devil's Trill Sonata"
 (Bibliothèque nationale de France).

Figura 2

Frequenza relativa dei suoni uditi da Blein con $f_1 = 256$ Hz e f_2 variabile da 256 a 512 Hz (linea e triangoli pieni azzurri). I simboli rappresentano le frequenze udite, mentre le linee rappresentano le frequenze teoriche. Le frequenze udite sono due: $f_2 - f_1$ (quadrati rossi vuoti) udibile in tutto l'intervallo dell'ottava e $2f_1 - f_2$ (quadrati pieni verdi) udibile solo nell'intervallo da 1 a $1,5 f_2/f_1$. Molti di questi suoni erano uditi contemporaneamente. Notare che per $f_2/f_1 = 1,5$ ($3/2$, intervallo di quinta giusta) il valore di $f_2 - f_1$ e $2f_1 - f_2$ coincidono. Non è detto però che il suono risultante sia più intenso perché il risultato della somma dipende dalla fase dei due suoni.

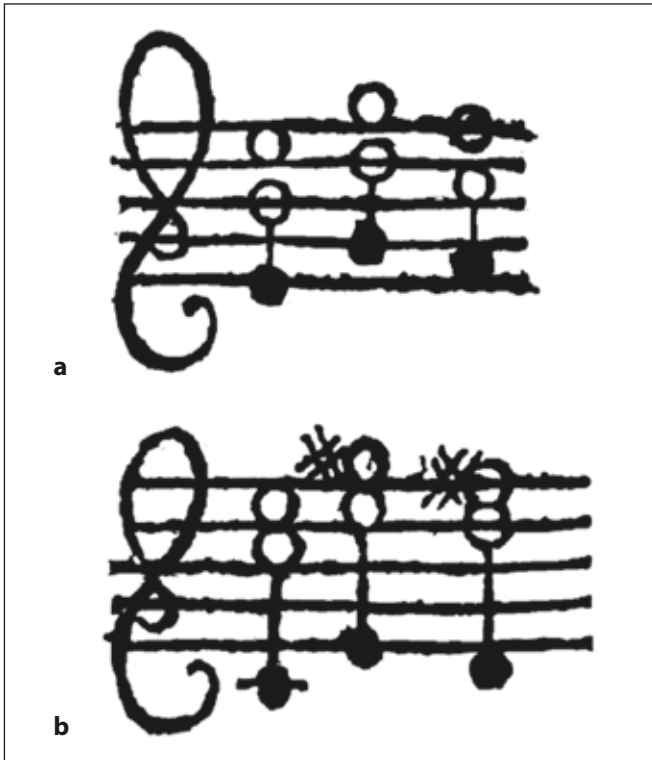


Figura 1

Terzo suono della quarta giusta (a) e terza maggiore (b). Il terzo suono è rappresentato dalle note piene. (da G. Tartini, *Trattato di Musica secondo la vera scienza dell'armonia*, 1754).

Figure 1

Third tone of the perfect fourth (a) and major third (b). The third tone is represented by the filled notes. (from G. Tartini, *Trattato di Musica secondo la vera scienza dell'armonia*, 1754).

Tartini ha studiato in dettaglio la relazione tra le note principali suonate e la nota risultante del terzo suono. Le sue osservazioni mostrano che, per esempio, se le due note primarie hanno un rapporto di $4/3$ (intervallo di quarta giusta), il terzo suono è in quinta giusta con la nota grave della quarta (figura 1a). Se il rapporto è $5/4$ (terza maggiore, figura 1b), il terzo suono è un'ottava sotto la nota grave. Il concetto di frequenza non appartiene al contesto culturale di Tartini, che esprime i suoi ragionamenti in termini di lunghezze di corda e vibrazioni, ma verrà qui impiegato per brevità di notazione e per omogeneità con i lavori successivi. Indicando la frequenza della nota grave con f_1 e quella acuta con f_2 ($f_2 > f_1$), il terzo suono di Tartini ha una frequenza pari a $2f_1 - f_2$ nel caso della quarta giusta e $3f_1 - 2f_2$ nel caso della terza maggiore.

All'epoca di Tartini le conoscenze di acustica erano molto limitate e il meccanismo fisico del terzo suono era del tutto sconosciuto. Tartini avanza l'ipotesi che esso sia prodotto dall'urto delle masse d'aria mosse dalle corde vibranti dei due violini senza ulteriori approfondimenti. Per Rameau il terzo suono derivava invece dalla fusione dei battimenti. I battimenti si verificano quando due suoni hanno frequenze molto vicine e consistono in una mo-

dreas Sorge (1703-1778) around 1745, but Tartini was the original discoverer (Jones, 1935) and investigated more thoroughly the third tone properties; for these reasons the third tone is rightly named after him. Tartini studied in detail the relationship between the primary notes and the resulting third tones. His observations showed that, for example, if the two primary notes are in a ratio of $4/3$ (just fourth interval) the third tone is a perfect fifth below the lower note of the dyad (figure 1a).

If the ratio is $5/4$ (major third, figure 1b) the third tone is one octave below the lower note. The concept of frequency does not belong to the cultural environment of Tartini, who expresses his thinking in terms of string length and vibrations, but we will employ it here for notational brevity and homogeneity with subsequent work. Indicating the lower note frequency with f_1 and the higher note with f_2 ($f_2 > f_1$), the Tartini's third sound has a frequency equal to $2f_1 - f_2$, in the case of the interval of perfect fourth, and $3f_1 - 2f_2$ in the case of the major third. In Tartini's time the knowledge of acoustic was very

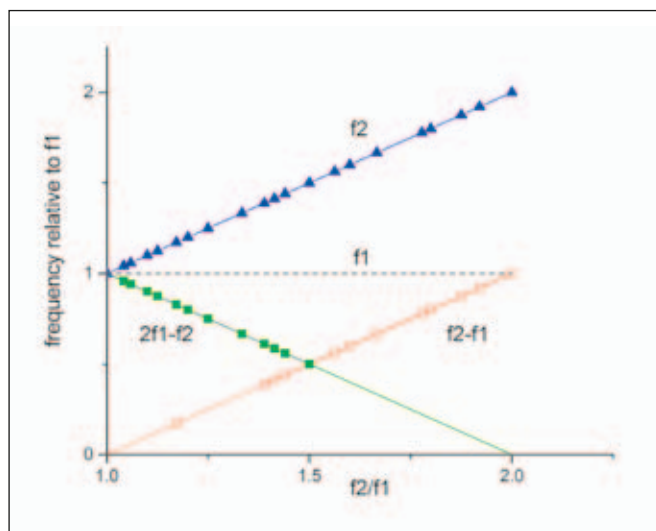


Figure 2

Relative frequency of the tones heard by Blein with $f_1 = 256\text{Hz}$ and f_2 variable between 216 and 512 Hz (line and filled blue triangle). The symbols represent the frequencies actually heard, while the lines represent all the theoretical frequencies.

Two frequencies are heard: $f_2 - f_1$ (empty red squares) audible over the whole octave interval and $2f_1 - f_2$ (filled green squares) audible only in the interval from 1 to $1.5 f_2/f_1$. Many of these tones were heard at the same time. Note that for $f_2/f_1 = 1.5$ (3/2, interval of perfect fifth) both $f_2 - f_1$ and $2f_1 - f_2$ have the same value. The resulting tone is not necessarily louder because the resulting sum depends on the relative phase of the two tones.

dulazione di ampiezza del suono risultante, con una frequenza pari alla differenza delle frequenze suonate. Secondo Rameau con l'aumentare della differenza aumenta la frequenza dei battimenti che, infine, quando la differenza è grande, vengono percepiti come un suono continuo: il terzo suono appunto. Quest'ipotesi è stata condivisa all'epoca da molti insigni scienziati quali per esempio Thomas Young (1773-1829), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Rudolph Koenig (1832-1901) e altri.

Young (1800), investigando il terzo suono, trovò che se le due note suonate contemporaneamente erano in rapporto di $5/4$ (terza maggiore) si potevano sentire, in aggiunta alle note principali, non uno ma due terzi suoni di simile intensità ed entrambi a frequenza più bassa della nota grave del bicordo: uno era due ottave sotto, mentre l'altro era una quarta giusta sotto. Il primo ha una frequenza pari a $f_2 - f_1$, mentre il secondo ha una frequenza

pari a $2f_1 - f_2$. Quest'osservazione non è in contraddizione con quella di Tartini che sentiva – con lo stesso intervallo – il suono corrispondente a $3f_1 - 2f_2$ perché in certe condizioni entrambi i suoni possono essere uditi. Vedremo in seguito l'importanza di queste osservazioni.

Nel secolo successivo il terzo suono è diventato oggetto di studi sistematici ed è stato definito più propriamente come *tono* o *toni di combinazione*. Probabilmente la prima prova sperimentale dettagliata sull'udibilità dei toni di combinazione è stata quella di Ange Francois Blein, riportata da Weber nel 1829, usando corde vibranti. Nell'esperimento, la frequenza f_1 della nota più grave era fissata a 256 Hz (Do 4), mentre la nota più alta, a frequenza f_2 , variava con intervalli musicali da 256 a 512 Hz, quindi nell'ambito di un'ottava. Seguendo l'esempio di Plomp (1965) i risultati di Blein, in origine riportati in una tavola, sono espressi graficamente nella figura 2.

limited and the physical bases of the third tone was unknown. Tartini simply assumed that the third tone is produced by the collision of the air masses moved by the two violins without further analysis. According to Rameau, the third tone was instead arising from the fusion of beats. The beats occur when two tones have frequencies very close to each other and consist of an amplitude modulation of the resulting sound with a frequency equal to the difference between the played frequencies. According to Rameau, increasing the difference between the two played notes increases the frequency of the beats that eventually, when the difference is high, are perceived as a continuous sound: the third tone. This hypothesis was shared by other famous scientists of that time, for example, Thomas Young (1773-1829), Joseph Louis Lagrange (1736- 1813), Rudolph Koenig (1832-1901) and others. Young (1800), investigating the third tone, found that if the two notes played at the same time have a ratio of $5/4$ (major third), one could hear two third tones in addition to the two main notes, of similar intensity and of lower

frequency than the lower note of the dyad: one was 2 octaves below and the other a perfect fourth below. The first has a frequency equal to $f_2 - f_1$ while the second has a frequency of $2f_1 - f_2$. This observation is not in disagreement with that of Tartini, who heard with the same interval, the tone corresponding to $3f_1 - 2f_2$, because under certain conditions, both sounds can be heard. We will see later the importance of these observations. In the following century the third tone became the subject of systematic and comprehensive studies and it was agreed that it might be more properly called "combination tone" or tones. Very likely the first detailed experimental proof of the audibility of the combination tones was that given by Ange Francois Blein (reported by Weber in 1829), using vibrating strings. In the experiment the lower note, f_1 , was fixed at 256 Hz (C4) while the higher note at frequency f_2 was varied with musical intervals from 256 to 512 Hz, hence in the interval of an octave. Following the example of Plomp (1965) the results of Blein, originally shown in a table, are expressed graphically in figure 2.

Si può vedere che Blein udiva i toni $f_2 - f_1$ e $2f_1 - f_2$ che, come ricordiamo, sono quelli già riportati da Young. Secondo queste osservazioni l'udibilità dei suoni dipende dal rapporto f_2/f_1 : per $f_2/f_1 > 1,5$ f_1 il tono $2f_1 - f_2$ non è udibile mentre il tono differenza $f_2 - f_1$ è udibile nell'intero intervallo di osservazione.

HELMHOLTZ E LA TEORIA DELLA DISTORSIONE

Molti altri autori hanno condotto ricerche simili riportando altri toni di combinazione, per esempio $3f_1 - 2f_2$ e altri. L'esistenza di questi ulteriori toni di combinazione non era allora accettata universalmente, ma tutti gli sperimentatori all'epoca concordavano sull'esistenza dei due toni con frequenza $f_2 - f_1$ e $2f_1 - f_2$. Con l'eccezione di Hermann von Helmholtz (1821-1894), fisiologo, medico e fisico tedesco il quale, in base ai suoi studi effettuati principalmente con sorgenti sonore sinusoidali (diapason), trovava solo il suono differenza $f_2 - f_1$ ma non gli altri (1913). Helmholtz, in disaccordo con la teoria classica dei battimenti (quella di Rameau, Young e altri), propose una spiegazione per i toni di combinazione nuova e rivoluzionaria,

divenuta famosa in seguito come *teoria della distorsione*. Secondo Helmholtz, la deformazione di un sistema elastico come l'aria, sottoposta a compressione e rarefazione dalle onde sonore, è lineare solo per deformazioni infinitesime. Se le deformazioni non sono infinitesime, come nel caso di onde sonore, specialmente se ad alta intensità, la risposta diventa non lineare. Nel caso di due suoni puri (sinusoidali) contemporanei di frequenza f_1 e f_2 la non linearità crea una *distorsione dei segnali* originari con la comparsa di nuove frequenze, diverse dalle note primarie, che costituiscono i suoni di combinazione. Questa distorsione è chiamata oggi anche *distorsione di intermodulazione*. Nonostante che i suoni di combinazione possano essere prodotti da strumenti musicali ed essere effettivamente presenti nell'aria (Helmholtz, 1913), Helmholtz riteneva che i suoni uditi normalmente fossero generati all'interno dell'apparato uditivo, nelle strutture vibranti dell'orecchio medio. In particolare, riteneva che la struttura del timpano e della catena degli ossicini avrebbe potuto fornire una risposta asimmetrica in relazione al verso del movimento, positivo o negativo, che avrebbe condotto alla distorsione. Dal punto di vista teorico, l'effetto della non linearità venne simulato da Helmholtz introducendo nell'equazione del moto l'assunzione che la forza elastica k di ritorno alla posizione di equi-

We can see that Blein heard $f_2 - f_1$ and $2f_1 - f_2$ tones that are those already heard by Young. According to these observations, the audibility of these tones depends on the ratio f_2/f_1 : for $f_2/f_1 > 1.5$ the $2f_1 - f_2$ tone is not audible while the difference tone $f_2 - f_1$ is audible in the whole observation interval.

HELMHOLTZ AND DISTORTION THEORY

Many others authors made similar kinds of research and reported other combination tones, for example $3f_1 - 2f_2$ and others. The reality of these combination tones at that time was not accepted universally, but all the researchers agreed on the existence of the two tones with frequencies of $f_2 - f_1$ and $2f_1 - f_2$. There was a noteworthy exception to this idea, because Hermann von Helmholtz, German physiologist, physician and physicist (1821-1894), found only the tone $f_2 - f_1$ but not the others (1913). On the bases of his studies and experi-

ments, performed mainly using sinusoidal waves (using diapasons as sound sources), he disagreed with the classical beats theory (that of Rameau, Young and others) and proposed a new and revolutionary theory of the combination tones which became famous later as *distortion theory*. According to Helmholtz the deformation of an elastic body, like the air compressed or expanded by the acoustic waves, is linear only for infinitesimal deformation. When the deformation is not infinitesimal, as in the case of acoustic waves, especially those of high intensity, the response becomes non-linear. In the case of two simultaneous sinusoidal tones at frequency f_1 and f_2 the non-linearity gives rise to a distortion of the original sounds with the appearance of new frequencies, different from the primary notes, which constitute the combination tones. Today this kind of distortion is known also as *intermodulation distortion*. Although the combination tones can be produced by musical instruments and be present in the air (Helmholtz, 1913), Helmholtz assumed that the combination tones normally heard are generated in the inner

librio di una massa oscillante lungo un asse x , dipenda non solo da x ma anche da x^2 cioè:

$$k = ax + bx^2$$

dove a e b sono due costanti. Risolvendo l'equazione, Helmholtz ha mostrato che la risposta del sistema all'azione combinata di due onde sonore pure contiene non solo le frequenze primarie $f1$ e $f2$, ma anche le armoniche superiori $2f1$ e $2f2$, il tono differenza $f2 - f1$ e quello somma $f1 + f2$. Quindi, quest'analisi teorica mostrava che i toni di combinazione potevano avere un'origine completamente diversa dai battimenti e insorgere direttamente nell'orecchio senza la loro presenza nell'aria. L'analisi indicava anche la presenza di molti altri suoni seppure di ampiezza molto ridotta. Tra questi, c'era anche il suono di combinazione $2f1 - f2$ udito da Young e da molti altri sperimentatori dell'epoca. Helmholtz, ha interpretato questo suono come suono differenziale di secondo ordine, cioè come differenza fra $f1$ e il suono differenziale tra $f2$ ed $f1$, cioè come $f1 - (f2 - f1)$ e così ha fatto con gli altri suoni più complessi.

A conferma della sua teoria, Helmholtz riporta di avere udito non solo il tono $f2 - f1$, ma anche il tono somma $f2 + f1$ che, in generale, non era udito da altri ricercatori (è

interessante notare che Helmholtz ha udito il suono somma solo dopo aver trovato che la sua teoria lo prevedeva). La difficoltà nell'udire il suono somma $f1 + f2$ veniva attribuita al fatto che la sua ampiezza, come previsto dalla teoria, era molto più piccola di quella di $f2 - f1$ (oggi sappiamo che questo tono, anche se presente, subirebbe l'effetto del mascheramento dovuto alle frequenze primarie più gravi risultando difficilmente udibile). Anche se inizialmente ci sono state critiche, con il tempo l'idea della distorsione di Helmholtz, anche grazie al successo della sua teoria della risonanza cocleare è stata accettata universalmente.

GLI ESPERIMENTI MODERNI

Negli anni successivi, molti altri Autori hanno lavorato sui toni di combinazione e l'idea che essi siano la conseguenza della distorsione del sistema uditivo è diventata oggi un'idea comune. Utilizzando le nuove tecniche di elettronica disponibili nel 1965, Plomp (1965) ha ripetuto alcuni dei vecchi esperimenti sull'udibilità dei toni di combinazione. I risultati trovati indicavano che i toni maggiormente uditi dai soggetti investigati corrispondevano a $f2 - f1$, $2f1 - f2$ e $3f1 - 2f2$ in accordo con i risultati precedenti.

ear. He was convinced that the structure of the eardrum and the chain of the ossicles could produce an asymmetric response in relation to the positive or negative movement which would lead to the observed distortion. The theoretical effects of the non-linearity were simulated by Helmholtz by introducing into the equation of motion the assumption that the elastic force recovery k towards the equilibrium position of an oscillating mass along the x axis depends not only on x but also on x^2 hence,

$$k = ax + bx^2$$

where a and b are constants. Resolving the equation, Helmholtz showed that the response of the system to a combined action of two sinusoidal acoustic waves contains not only the primary frequencies $f1$ and $f2$ and the higher harmonics $2f1$ and $2f2$ but also the difference tone $f2 - f1$ and the sum tone $f1 + f2$. Therefore, the analysis showed that the combination tones originates not from the beats, but directly from the inner ear with-

out being present in the air. The analysis also showed the presence of many other tones, although of very small amplitude. Among them there was the combination tone $2f1 - f2$ heard by Young and other scientists of that time. Helmholtz assumed that this tone is a second order differential tone, or the difference between $f1$ and the differential sound $f2 - f1$, [$f1 - (f2 - f1)$]. Also, the more complex combination tones, were explained in the same way. Confirming his theory, Helmholtz reported that he heard not only the tone $f2 - f1$ but also the sum tone ($f1 + f2$), that in general was not heard by other scientists (it is interesting to note that Helmholtz heard the sum tone only after having seen that this tone was predicted by his theory). The difficulties in hearing the tone $f1 + f2$ were attributed to the small intensity of this tone, much smaller than that of $f2 - f1$, as predicted by the theory (now we know that this sound, even if present, would be masked by the main tones at lower frequency, becoming hardly audible). Even if initially there were some criticisms, over the time, the Helmholtz idea

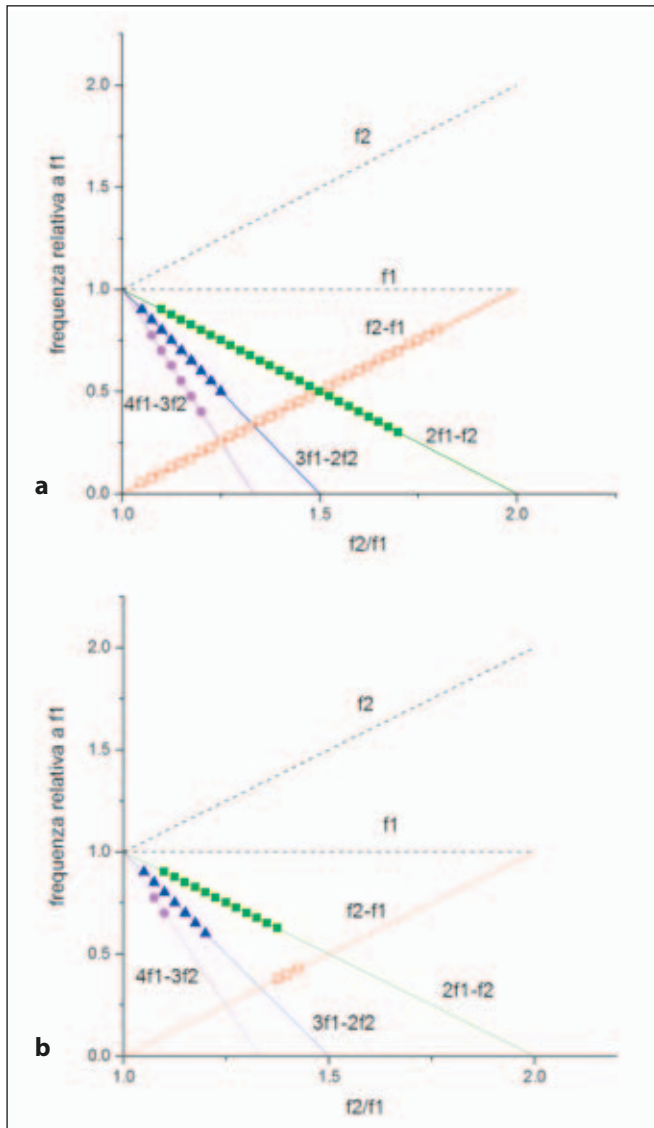


Figura 3

Udibilità dei toni di combinazione $f_2 - f_1$, $2f_1 - f_2$, $3f_1 - 2f_2$ e $4f_1 - 3f_2$ con $f_1 = 1\text{kHz}$ e f_2 variabile da 1kHz a 2kHz . Le frequenze udite dai soggetti esaminati sono rappresentate dai simboli, le linee rappresentano tutte le frequenze udibili teoricamente. **a**, Intensità sonora 80dB ; **b**, come in **a**, ma con intensità sonora ridotta a 40dB . Notare la forte riduzione dell'intervallo di udibilità di $f_2 - f_1$ (**b**).

Figure 3

Audibility of the combination tones $f_2 - f_1$, $2f_1 - f_2$, $3f_1 - 2f_2$ e $4f_1 - 3f_2$ with $f_1 = 1\text{kHz}$ and f_2 variable from 1kHz to 2kHz at $\text{SPL} = 80\text{dB}$. The frequencies heard by the subjects examined are represented by the symbols, the lines represent all the frequencies audible theoretically. **a**, Intensity 80dB ; **b**, as in **a**, but with SPL reduced to 40dB . Note the great reduction of the audibility interval of $f_2 - f_1$ (**b**).

Ma l'udibilità di questi suoni dipendeva dal livello di intensità sonora e dal rapporto f_2/f_1 . Alla pressione sonora di 80dB (un'intensità fastidiosa corrispondente all'incirca al rumore prodotto da un asciugacapelli) per $f_1 = 1\text{kHz}$, i toni $f_2 - f_1$ e $2f_1 - f_2$ erano uditi con intensità simile per un rapporto di f_2/f_1 da 1 a 1,7, il tono $3f_1 - 2f_2$ era udito fino a circa $1,4 f_2/f_1$. Riducendo l'intensità a 40dB (ambiente domestico di giorno, conversazione tranquilla) si riduceva l'intervallo delle frequenze udibili: il suono $f_2 - f_1$ era udito in un intervallo molto più piccolo, intorno al rapporto $f_2/f_1 \sim 1,4$, mentre i toni di ordine superiore erano uditi in un intervallo più grande da 1,1 a 1,4 circa. Chiaramente udibile era anche il tono corrispondente a $4f_1 - 3f_2$. Questi dati, adattati da Plomp, sono mostrati nella figura 3.

In più, la soglia di udibilità dei toni di combinazione dipendeva dall'intervallo fra le due frequenze primarie. A bassi livelli di intensità sonora il tono di combinazione $2f_1 - f_2$, chiamato anche *distorsione cubica*, predominava e mostrava una scarsa dipendenza dall'intensità delle frequenze primarie. Per questa ragione la distorsione cubica è stata chiamata anche *distorsione essenziale* (Goldstein, 1967). Al contrario il tono $f_2 - f_1$, chiamato anche *distorsione quadratica*, aumentava più dei suoni principali all'aumentare dell'intensità come previsto dalla teoria di Helmholtz.

of combination tones as distortion products, also thanks to the success of his resonance theory of the cochlea, has been universally accepted.

MODERN EXPERIMENTS

In the successive years many scientists worked in the field of combination tones and the idea that they arise because of the distortion of the auditory system has become widely accepted. Using the new electronic technique available in 1965, Plomp repeated some of the old experiments on the audibility of the combination tones. The results showed that the tones heard by most of the investigated subjects corresponded to $f_2 - f_1$, $2f_1 - f_2$, $3f_1 - 2f_2$, in agreement with the previous observations. The audibility of the tones heard was dependent on their intensity and on the ratio f_2/f_1 . At a sound pressure level (SPL) of 80dB (an annoying intensity similar to that produced by an hairdryer) for $f_1 = 1\text{kHz}$ the tones $f_2 - f_1$ and $2f_1 - f_2$ were heard with a similar intensity for a

Notare che Plomp nel suo lavoro ha analizzato intervalli tra frequenze precise (1kHz, 800Hz, 600Hz eccetera), non necessariamente corrispondenti a intervalli musicali. Nonostante questo le conclusioni non sono diverse da quelle di Blein e altri che usavano invece intervalli musicali. Questo risultato non sorprende essendo stato già stato anticipato da Tartini quando scriveva: “*ch'eccezzuato l'unisono e l'ottava, [il terzo tono] si produce da qualunque in genere generalissimo [intervallo]*”. I dati di Plomp (1965) mostrano che i livelli medi di distorsione rappresentati dai toni di combinazione sono intorno a -40dB o 1% rispetto ai toni principali e quindi praticamente non udibili ai livelli normali di ascolto. Questo fatto, secondo Plomp, sarebbe in contrasto con l'importanza attribuita ai suoni di combinazione in campo musicale da Hindemith (1942), per esempio, che li considerava fondamentali. Tuttavia, altri autori hanno raggiunto conclusioni diverse da Plomp. Per esempio, Goldstein (1967) ha trovato che almeno in un limitato intervallo di frequenze ($\sim 10\%$ del totale) l'intensità media del tono maggiormente udibile cioè $2f_1 - f_2$ è circa 15dB sotto le note principali, corrispondendo a una distorsione del 10-15%, quindi, non trascurabile e chiaramente udibile. Oggi non ci sono dubbi sul fatto che i suoni di combinazione abbiano impor-

tanza nel contesto musicale. Fin dall'ultima metà del secolo scorso i compositori hanno lavorato e lavorano con i toni di combinazione come materiale armonico.

Negli esperimenti di Plomp e in quelli di Goldstein l'intensità dei toni di combinazione è stata determinata usando la tecnica della cancellazione, che consiste nell'aggiungere al segnale acustico composto dalle frequenze principali f_1 e f_2 uno o più segnali con frequenze corrispondenti al tono o ai toni da cancellare. Variando l'intensità e la fase di questi segnali aggiunti si può ottenere la completa scomparsa del tono o dei toni di combinazione che si verifica quando i segnali aggiunti sono uguali e in opposizione di fase ai toni da cancellare. Goldstein ha riportato un'osservazione molto interessante dal punto di vista musicale: secondo alcuni dei soggetti studiati la cancellazione contemporanea dei toni $2f_1 - f_2$ e $3f_1 - 2f_2$ riduceva in maniera drastica la “qualità musicale” del suono, che risultava particolarmente sciatto rispetto all'originale. Da qui la conclusione che i toni di combinazione, pur essendo una distorsione del segnale originario, non sembrano rappresentare un peggioramento nella percezione della qualità sonora. Queste osservazioni sembrano in accordo con l'idea di Hindemith dei toni di combinazione come componenti importanti del timbro caratteristico dell'intervallo.

ratio f_2/f_1 varying from 1 to 1.7, the tone $2f_1 - f_2$ was heard up to $1.4 f_2/f_1$. Reducing the SPL to 40dB (corresponding to the ambient daily house noise) the interval of the audible frequencies decreased: $f_2 - f_1$ was heard in a small interval near the ratio $f_2/f_1 \sim 1.4$ whereas the tones of higher orders were heard over an interval from ~ 1.1 to 1.4. The tone $4f_1 - 3f_2$ was also audible. These data, adapted from Plomp, are shown in figure 3.

In addition, the audibility threshold for the combination tones was dependent on the interval between the two primary frequencies. At low SPL the combination tone $2f_1 - f_2$, also called *cubic distortion*, predominated and showed scarce dependence on the intensity of the primary frequencies. For this reason, the cubic distortion was also called “essential” (Goldstein, 1967). On the contrary, the $f_2 - f_1$ tone also called *quadratic distortion*, increased more than the primary tones when the SPL increased, as predicted by the distortion theory. Note that Plomp analyzed intervals between precise frequencies (1kHz, 800, 600Hz etc.) not necessarily correspond-

ing to musical intervals. Despite this, Plomp's conclusions are the same as those of Blein and others who used only musical intervals. This is not a surprising result since it was anticipated by Tartini who wrote “... *ch'eccezzuato l'unisono e l'ottava, [il terzo tono] si produce da qualunque in genere generalissimo [intervallo]*”... (excluding the unison and the octave, the third sound can be produced by any interval). Plomp's data (1965) show that the mean distortion level associated with the combination tones are around -40dB or 1% of the primary tones and thus practically not audible at normal listening levels. This fact, according to Plomp, would be in contrast with the importance attributed to the combination tones in music, for example, by Hindemith (1942) who considered them of fundamental importance. However, other authors reached a different conclusion with respect to Plomp. For example, Goldstein (1967) found that at least in a limited frequency interval ($\sim 10\%$ of the total), the mean intensity of the most audible tone $2f_1 - f_2$ was about 15dB below the primary notes corresponding to a

Distorsione cocleare e feedback positivo

Come abbiamo detto, molti dati sperimentali suggerivano l'origine cocleare dei toni di combinazione. Le ricerche recenti confermano questa ipotesi mostrando il comportamento non lineare della coclea. Due aspetti di questa non linearità sono mostrati nella figura 4.

Il pannello sopra mostra che la velocità del movimento vibratorio causato dalle onde sonore della membrana basilare della coclea (da cui dipende la sensazione auditiva), non è proporzionale alla pressione sonora, ma cresce sempre meno all'aumentare di questa, la relazione ha cioè un andamento compressivo. Questo significa che i segnali deboli vengono amplificati dalla coclea molto di più di quelli forti. Grazie a questa compressione la coclea è in grado di rilevare segnali sonori in un enorme intervallo di intensità sonora senza saturare: si va dalla soglia di udibilità corrispondente alla pressione di 20 μPa o 0 dB fino alla soglia del dolore pari a una pressione dieci milioni di volte più grande di 200 Pa o 140 dB. Notare che la pressione sonora è sovrapposta alla pressione atmosferica, ma è del tutto trascurabile rispetto a questa. Anche la pressione causata da un suono oltre la soglia del dolore di 200 Pa è circa tre ordini di grandezza inferiore alla pressione

atmosferica che è di circa 10^5 Pa. Questa osservazione dimostra la straordinaria sensibilità dell'apparato uditivo. La seconda parte della figura (figura 4b) mostra lo spettro sonoro delle emissioni otoacustiche (EOA). Queste sono emissioni sonore causate dalle vibrazioni della membrana basilare che si propagano indietro raggiungendo il canale auricolare e l'esterno, attraverso la catena degli ossicini e il timpano. Le EOA possono essere spontanee o indotte da uno o più stimoli sonori (EOA stimulate). Vengono registrate con un microfono miniaturizzato posto nel canale auricolare e lo spettro viene calcolato dalla registrazione. Nel caso illustrato nella figura 4 lo spettro è ottenuto in risposta all'applicazione simultanea di due suoni puri a frequenza f_1 e f_2 . La comparsa di una serie di altre frequenze, non presenti nel segnale originario (i toni di combinazione), è la prova della distorsione dovuta alla non linearità della coclea.

A causa della viscosità del liquido che la circonda, le vibrazioni "passive" della membrana basilare prodotte dai suoni in entrata, sarebbero fortemente smorzate e i picchi di risonanza nelle varie zone sarebbero relativamente bassi e larghi e quindi la selettività della coclea sarebbe molto bassa. Tuttavia, questa situazione viene sostanzialmente modificata dalla presenza di un mecca-

→ *Continua a pag. 14*

distortion of 10-15%, hence not trivial and clearly audible. Nowadays there are no doubts about the importance of the combination tones in the musical context; during the last half century, composers have been working with combination tones as harmonic material.

In the experiments above by Plomp and Goldstein, the intensity of the combination tones was measured using the cancellation technique. This technique adds to the acoustic test signal composed of the main frequencies f_1 and f_2 , one or more frequencies corresponding to the combination tone or tones which we want to cancel out. Changing the phase and the amplitude of these added signals we can obtain the complete disappearance of the combination tones. This would happen when the added sounds have the same intensity and are in phase opposition to the combination tones. Goldstein reports an observation that is very interesting from the musical point of view: according to some of the subjects investigated, the simultaneous double cancellation of the $2f_1 - f_2$ and $3f_1 - 2f_2$ tones produced a sharp reduction of the perceived

musical quality of the sound which becomes particularly drab. Thus, we can conclude that combination tone, in spite of being a distortion of the original tone, cannot be treated as a nuisance effect but rather as an affect increasing the perceived musical quality. These observations seem to agree with the Hindemith conclusion that the combination tones are important musical components of the interval.

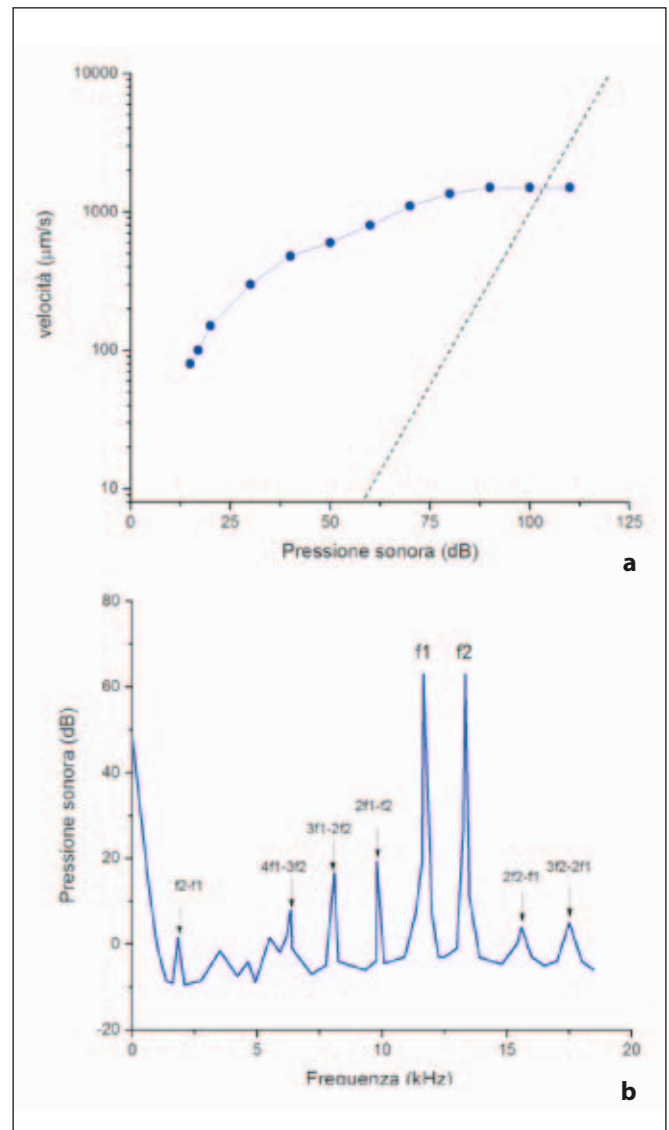
The cochlear distortion and the positive feedback

As said before, many experimental data suggest the cochlear origin of the combination tones. The recent research confirms this hypothesis showing the non-linear behaviour of the cochlea. Two aspects of the cochlear non-linearity are shown in figure 4.

The superior panel shows that the speed of the basilar membrane movement caused by the acoustic wave (from which the sonorous perception depends) is not proportional to the SPL but grows less and less with the SPL

Figura 4

a. Risposta compressiva della coclea di cincillà misurata alla frequenza caratteristica di 10kHz. In ordinata la velocità di movimento della membrana basale in risposta alla pressione sonora applicata (cerchi pieni). La linea tratteggiata indica la risposta lineare proporzionale (1dB/dB). Notare che a bassi livelli sonori la risposta aumenta quasi in proporzione allo stimolo (primi punti a sinistra quasi paralleli alla linea tratteggiata) mentre ad alti livelli la risposta non cambia molto all'aumentare dello stimolo. **b.** Spettro di emissioni otoacustiche (EOA) evocate in risposta a due toni puri di frequenza f_1 e f_2 nella coclea di cincillà. Notare che la risposta contiene molte altre frequenze (i valori sono indicati dalle frecce verticali) oltre alle frequenze immesse f_1 e f_2 , dovute alla distorsione cocleare.

**Figure 4**

a. Nonlinear compressive response of the cochlea of chinchilla at the characteristic frequency of 10kHz. Ordinate: basilar membrane movement velocity (filled circles) in response to SPL applied. The dashed line shows the linear proportional response 1dB/dB. Note that at low values the response increases almost in proportion to SPL (the first 3 points to the left are almost parallel to the dashed line). At high SPL the response does not change much with the stimulus increase. **b.** Otoacoustic emission spectra (OAE) evoked in response to two simultaneous pure tones at frequencies f_1 and f_2 in the cochlea of chinchilla. The response contains many other frequencies (indicated by the vertical arrow) in addition to f_1 , f_2 , a clear sign of the cochlear distortion.

leading to a compressive relation. This means that weak acoustic signals are amplified by the cochlea much more than the stronger signals. Because of this compressive behaviour the cochlea can detect acoustic signals in an enormous interval of SPLs without saturating: starting from the audibility threshold corresponding to the SPL of 20 μ Pa or 0dB up to the pain threshold equal to a 10 million times greater SPL of 200 Pa or 140 dB. Note that the sound pressure is superimposed onto the atmospheric pressure, but it is almost negligible compared to it: even the pressure caused by a sound above the pain threshold of 200Pa is more than three orders of magnitude smaller than the atmospheric pressure (about 10^5 Pa). These observations show the extraordinary sensitivity and dynamic of the auditory apparatus. The second part of figure 4 (b) shows the acoustic spectra of the stimulated otoacoustic emissions (OAE). These are acoustic waves emitted by the basilar membrane that propagate backwards to the auricular duct and to the external air through the ossicle chain and the eardrum.

The OAE can be induced by one or more acoustic stimuli or they can occur spontaneously without any stimulation (spontaneous OAE). They are recorded by means of a miniature microphone placed in the auricular channel and the spectrum is calculated from the recordings. In the case of figure 4 the evoked OAE spectrum is obtained in response to the simultaneous application of two pure sounds at frequencies of f_1 and f_2 . The appearance of a series of other frequencies, not present in the original sounds – the combination tones – are the proofs of the distortion caused by the cochlear non-linearity.

Because of the viscosity of the surround fluid the “passive” vibrations of the cochlea induced by the incoming sounds would be strongly damped so that the resonance peaks of the various cochlear regions would be strongly smoothed out and the cochlea selectivity would be consequently very low. However, this unfavorable situation is substantially reversed by the presence of an “active” cochlear mechanism which counteracts the damping effect of the cochlear fluid: the cochlear amplifier. To explain

→ Continued pag. 14

La coclea

La dipendenza dei toni di combinazione dall'intensità sonora e soprattutto dal rapporto f_2/f_1 , indicavano che la distorsione molto probabilmente non era generata dall'orecchio medio (ipotesi di Helmholtz), ma dalla coclea che ha una risposta selettiva alle varie frequenze. Questa ipotesi è stata confermata da esperimenti successivi che hanno mostrato che l'orecchio medio ha una risposta molto lineare anche a grandi intensità sonore. Ma quale può essere il meccanismo cocleare dei toni di combinazione? Per rispondere a questa domanda è necessario introdurre alcuni elementi della struttura e della funzione cocleare.

La coclea è formata da un condotto cocleare avvolto a spirale e diviso longitudinalmente dalla base all'apice, dalla membrana basilare e dalla membrana di Reissner con la formazione di tre compartimenti contenenti liquido: la scala timpanica, la scala media e la scala vestibolare (figura R1). Sulla membrana basilare si appoggiano le cellule sensoriali auditive – le cellule ciliate interne ed esterne – che sono distribuite lungo tutta la coclea. Le ciglia delle cellule esterne sono in contatto con la membrana tectoria sovrastante, mentre quelle delle cellule interne, che sono le vere cellule sensoriali, sono flottanti nel liquido. L'insieme altamente organizzato delle cellule interne ed esterne con cellule di sostegno forma l'organo di Corti. La scala vestibolare e quella timpanica sono in comunicazione tra di loro all'apice della coclea attraverso un'apertura chiamata elicotrema. Le onde di pressione sonora esterne mettono in vibrazione il timpano e la catena degli ossicini. Le vibrazioni della staffa creano variazioni di pressione nel liquido della scala vestibolare. Poiché i liquidi sono virtualmente incompressibili le variazioni di pressione agiscono principalmente sulla membrana basilare mettendola in vibrazione e producendo le cosiddette *onde viaggianti* che si muovono lungo di essa dalla base all'apice della coclea. Le vibrazioni della membrana creano variazioni di pressione nella scala timpanica e sulla finestra rotonda che è libera di vibrare. La membrana basilare ha una struttura meccanica particolare: è spessa e stretta in prossimità della finestra ovale e diventa via via più sottile e larga procedendo verso l'apice della coclea. A causa di queste proprietà la membrana non ha un'unica frequenza naturale di vibrazione (risonanza) ma vibra preferenzialmente (risuona) e con maggiore ampiezza alle frequenze alte in prossimità della finestra ovale e a frequenze via via più basse procedendo da questa verso l'apice della coclea. Quindi la zona di membrana messa in vibrazione da un suono dipende dalla frequenza del suono stesso: più la frequenza è bassa e più la zona di vibrazione si sposterà dalla base verso l'apice (figura R2).

Così, un suono complesso metterà in vibrazione varie zone della membrana corrispondenti alle frequenze delle varie armoniche contenute nel suono (componenti sinusoidali), dalle più acute che si fermano nella zona della base alle più gravi che invece raggiungono l'apice. Quindi la membrana basilare scompone nello spazio il suono complesso effettuando di fatto un'analisi di Fourier e creando un'organizzazione tonotopica lungo la coclea.

Le onde viaggianti lungo la membrana basilare raggiungono la massima ampiezza nelle zone di risonanza decadendo subito dopo. Quindi, risulteranno stimulate quasi esclusivamente le cellule interne situate in queste zone codificando così la composizione in frequenza del segnale acustico. Da notare che le cellule ciliate di ogni zona sono "accordate o sintonizzate", cioè risuonano meccanicamente alla stessa frequenza della membrana basilare aumentando così la selettività e sensibilità della coclea.

Le vibrazioni della membrana nella zona di risonanza, creano un movimento di scorrimento tra la membrana basilare, su cui sono poste le cellule ciliate, e la membrana tectoria con conseguente deflessione delle ciglia più lunghe connesse con quest'ultima (figura R3).

I movimenti delle ciglia, attraverso una serie complessa di eventi, producono una variazione del potenziale di membrana delle cellule ciliate chiamata *potenziale di recettore*. Questo è formato da una componente che riproduce fedelmente l'andamento dell'onda sonora (tensione CA) e da una componente di tensione continua (tensione CC). Entrambi i potenziali crescono al crescere dell'intensità sonora. Il potenziale di recettore, attraverso un serie di eventi cellulari complessi, porta alla produzione di potenziali d'azione nelle fibre afferenti. Questi viaggiano lungo il nervo cocleare trasportando l'informazione sonora al nucleo cocleare nel tronco encefalico e da qui attraverso alcune tappe intermedie alla corteccia uditiva. Quindi il cervello converte gli impulsi elettrici in suoni che conosciamo e capiamo.

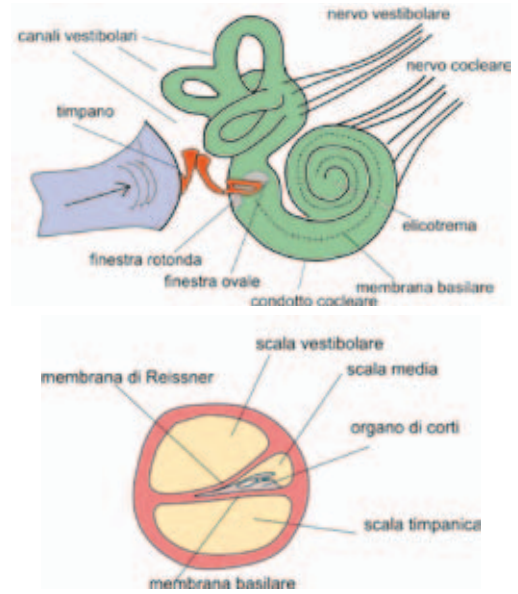


Figura R1

Schema semplificato dell'orecchio interno comprendente coclea e sistema vestibolare (a); sezione del condotto cocleare (b).

Figure R1

Schematic diagram of the inner ear including cochlea and vestibular system (a); cross-section of the cochlear duct (b).

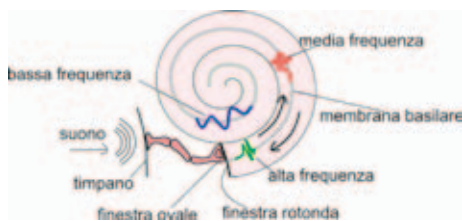


Figura R2

Propagazione delle vibrazioni sonore lungo la membrana basilare e scomposizione nello spazio delle armoniche (a frequenza alta, media bassa) di un suono complesso.

Figure R2

Propagation of the acoustic waves along the basilar membrane and decomposition in the space of the harmonics of a complex tone.

The cochlea

The dependence of combination tone intensity on the intensity of the acoustic wave, and especially on the ratio f_2/f_1 , suggests that the distortion is likely not arising from the middle ear (as assumed by Helmholtz), but from the cochlea which has a selective response to the various frequencies (this idea has been confirmed by successive experiments showing that the response of the middle ear is highly linear even at high SPL). What is then the cochlear mechanism responsible for combination tones? To answer this question, it is necessary to introduce some elements of the structure and cochlear function.

Figure R1 shows a simplified scheme of the vestibular apparatus and of the cochlea. The cochlea is made of the spiralized cochlear duct that is longitudinally split from the base to the apex by the Reissner and basilar membranes which leads to the formation of three internal compartments filled with liquid. They are: the tympanic duct, the cochlear duct and the vestibular duct. The auditory sensorial cells – the internal and external hair cells – are disposed on the basilar membrane and distributed all along the whole cochlea. The hairs of the external cells are in contact with the overhanging tectorial membrane while the hairs of the internal cells, which are the true sensorial cells, are floating in the liquid. The highly organized ensemble of the internal and external hair cells together with the support cells make up the Corti's organ. The vestibular and tympanic ducts communicated with each other at the apex of the cochlea through an opening called elicotrema. The external pressure waves force the eardrum and the ossicle chain to vibrate. The vibrations of the stape induce changes of pressure of the vestibular fluid which in turn produces traveling wave moving along the membrane towards the apex of the cochlea. The vibrations of the basilar membrane create pressure waves in the tympanic fluid which are discharged by the oval window. The basilar membrane has a peculiar mechanical structure: it is narrow and thick near the oval window, but it becomes thinner and thinner and wider towards the cochlea apex. Because of this structure, the natural frequency of vibration (resonance) of the basilar membrane is not unique. It vibrates preferentially (resonates) and with a greater amplitude, to high frequencies near the oval window and at lower and lower frequencies on going from the oval window to the cochlea apex. Hence the resonating zone of the membrane depends on the frequency of the sound: the lower is the frequency the closer is the vibrating region to the apex (figure R2).

Thus, a complex sound will put into vibration mainly the membrane regions corresponding to the resonance zones of the various harmonics (sinusoidal components) forming the complex tone. Therefore, we can say that the basilar membrane decomposes a complex sound in space performing a Fourier analysis and creating a "tonotopic" organization along the cochlea. The amplitude of the traveling waves changes along the membrane reaching a peak when they attain the resonance zone and falls quickly afterwards. The result is that mainly the inner hair cells of the resonant regions will be stimulated, thus encoding the frequency composition of the acoustic signal. Note that the inner hair cell is tuned, i.e. they mechanically resonate at the same frequency of the basilar membrane, increasing in this way the sensitivity and the selectivity of the cochlea. The vibrations in the resonance zone create a sliding movement between the basilar membrane, on which rest the outer hair cells, and the tectorial membrane leading to a deflection of the longest hairs connected to it (figure R3).

Through a complex series of cellular events, the hair deflection produces changes of membrane potential called receptor potential constituted by an AC component, which reproduce faithfully the course of the acoustic wave, and a DC component. The amplitude of both potentials increases with the intensity of the sound. The receptor potential gives rise to action potentials in the afferent fibers which travel along the cochlear nerve carrying the acoustic information to the cochlear nucleus in the brain stem and from there, through some intermediate steps, to the auditory cortex. The brain then translates the impulses into sounds that we know and understand.

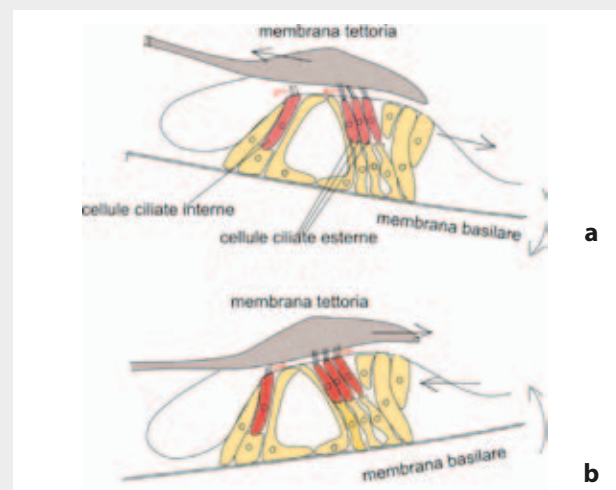


Figura R3

Effetti delle vibrazioni della membrana basilare sui movimenti delle ciglia. Con l'innalzamento e l'abbassamento della membrana basilare (freccie curve) dovuti alle vibrazioni, si crea un movimento di scorrimento tra le cellule interne ed esterne, situate sopra la membrana basilare, e la membrana tectoria, che deflette le ciglia delle cellule esterne direttamente collegate a quest'ultima (freccie rosse). La deflessione delle cellule interne che non sono collegate alla membrana tectoria avviene a seguito dei movimenti del liquido prodotto dallo scorrimento. Le cellule interne ed esterne sono mostrate in rosso. Le cellule in giallo sono cellule di sostegno.

Figure R3

Effects of basilar membrane vibrations on hair movements. The rise or lowering of the basilar membrane due to acoustic vibrations (curved arrows), gives rise to a sliding movement between the inner and outer hair cells, resting on the basilar membrane, and the tectorial membrane in which the hair of the outer cells is embedded. This produces the deflection of the external cell hairs (red arrows). The deflection of the inner cell hairs is produced by the fluid movement induced by the sliding. Inner and outer cells shown in red, support cells in yellow.

nismo “attivo” in grado di contrastare l’azione smorzante del fluido cocleare: *l’amplificatore cocleare*. Per spiegare le straordinarie caratteristiche della coclea, Gold (1948) intorno al 1940 ha ipotizzato l’esistenza di meccanismo attivo di feedback positivo che è stato poi effettivamente dimostrato intorno agli anni Ottanta. Questo meccanismo coinvolge le cellule ciliate esterne che, come quelle interne, convertono il movimento delle ciglia in segnali elettrici, ma al contrario di queste non inviano l’informazione auditiva al sistema nervoso centrale e posseggono l’elettromotricità. Cioè, le variazioni di potenziale indotte dalle vibrazioni ciliari, secondo la polarità, producono un allungamento o un accorciamento delle cellule stesse. Il movimento delle cellule è molto rapido così da seguire facilmente anche le frequenze più alte della gamma udibile. Supponiamo ora, per esempio, che a un dato momento una vibrazione sonora sposti le ciglia verso destra e che questo produca una depolarizzazione della cellula. Attraverso l’effetto elettromotorio, questa depolarizzazione allunga la cellula e spinge le ciglia contro la membrana tectoria piegandole ulteriormente verso destra, amplificando quindi la deformazione iniziale (figura 5). Questo aumento della deformazione induce un’ulteriore depola-

rizzazione aumentando di nuovo la lunghezza della cellula, il movimento delle ciglia e così via. Le vibrazioni delle cellule esterne così amplificate vengono trasmesse meccanicamente alle cellule sensitive. La stimolazione di queste induce la produzione di potenziali d’azione nel nervo cocleare codificando così il suono percepito. Teoricamente il feedback positivo tende ad aumentare l’amplificazione senza limiti, fino al punto da far entrare in risonanza qualche componente del sistema producendo oscillazioni percepibili. Tuttavia, in condizioni fisiologiche la presenza di fattori attivi e passivi, che controllano accuratamente il guadagno del feedback, mantiene stabile l’intero sistema evitando oscillazioni. È molto probabile che il controllo attivo sia effettuato dalle fibre efferenti che originando dalla corteccia uditiva raggiungono le cellule ciliate esterne in gran numero. Il ciclo di feedback descritto sopra è mostrato nella figura 5. Ed è in questo ciclo che si verifica la distorsione cocleare responsabile dei toni di combinazione. Il contributo determinante alla distorsione sembra da attribuire allo stadio 2, cioè al funzionamento non lineare dei canali meccanoelettrici (MET). In particolare, al rapporto non lineare tra la deflessione ciliare e l’entrata di ioni K^+ . Così, il meccanismo fisico del terzo suono

the extraordinary characteristics of the cochlea, Gold (1948) hypothesized around the 1940 the existence of a positive feedback which greatly amplify the membrane movements and selectivity. This prediction has found to be true around the 80’s. The active mechanism involves the outer hair cells that, similarly to the inner cells, convert the hair movements into electric signals, but differently from them, they do not send the auditory information to the SNC and possess the electromotility. This means that the potential changes induced by the hair vibration are converted into mechanical effects which, depending on the polarity of the potential changes, shortens or elongates the hair cells themselves. These length changes are fast enough to follow easily the highest frequencies of the audible range. Let us assume now, for example, that at a given time the acoustic vibration deflects the hairs to the right and this induces a cellular depolarization (figure 5). This depolarization, through the electromotility effect, elongates the cell and pushes the hairs against the tectorial membrane bending them

further to the right and thus strengthening the initial deflection. The increased bending of the hair will induce a further membrane depolarization increasing again the cell length, the hair bending and so on. It is easy to see that this positive feedback mechanism can greatly amplify the initial hair deformation. The amplified vibrations of the outer hair cells are transmitted mechanically to the sensory inner hair cells. The stimulation of the inner cells produces action potentials in the cochlear nerve encoding the perceived sound. Theoretically, the positive feedback tends to increase indefinitely the gain of the system until some part of it goes into resonance at a precise frequency thus inducing strong and perceptible vibrations. However, under physiological conditions, the presence of passive and active mechanisms which accurately control the gain of the feedback mechanism limit the gain increase maintaining the stability of the whole system and avoiding oscillations. It is likely that the active control is performed by signals originating from the auditory cortex and carried by the efferent fibers that

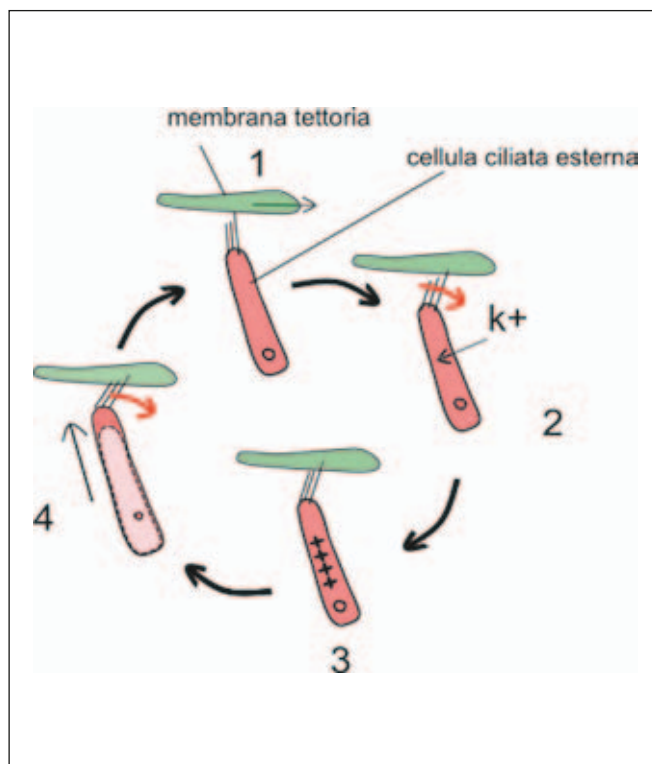
Figura 5

Ciclo del feedback positivo attivo all'origine dell'amplificazione cocleare. Nello stadio 1 le ciglia delle cellule esterne vengono deflesse verso destra dal movimento relativo tra la membrana tectoria e quella basilare. Il movimento delle ciglia apre i canali MET (canali meccanoelettrici) con conseguente entrata di ioni K^+ (stadio 2) spinti dal gradiente elettrochimico, che induce la depolarizzazione delle cellule (stadio 3). Poiché queste cellule possiedono l'elettromotilità la depolarizzazione genera una forza che allunga la cellula stessa (stadio 4) e questo produce un'ulteriore deflessione delle ciglia che rinforza la deflessione iniziale (stadio 1).

udito da Tartini ha una base molecolare identificabile con i canali MET, non stupisce che sia rimasto sconosciuto per così tanti anni!

Il feedback positivo cocleare è il principale responsabile della risposta compressiva già vista e della straordinaria selettività e sensibilità della coclea: basti pensare che possiamo udire suoni che inducono un movimento della membrana timpanica di soli 10^{-11} m (circa 1/5 del raggio dell'atomo di idrogeno) e distinguiamo due frequenze diverse tra loro di meno dello 0,3%. Una manifestazione fisiologica della motricità delle cellule cocleari e del meccanismo di feedback positivo è costituita dalle emissioni otoacustiche spontanee, viste in precedenza. Queste si registrano nel canale auricolare in individui normali anche in assenza di suoni esterni, come risultato di movimenti spontanei delle cellule esterne che si traducono in vibrazioni della membrana basilare. La presenza delle EOA spontanee viene usata come *screening* dell'apparato uditivo dei neonati.

Che la distorsione origini dal meccanismo del feedback positivo in cui sono implicate le cellule ciliari esterne è dimostrato anche dai dati riportati nella figura 6. Gli spettri in figura (EOA stimulate) sono registrati in risposta all'applicazione simultanea di due frequenze a-

**Figure 5**

The active positive feedback cycle of the cochlear amplification. At stage 1 the hair of the external cells is deflected to the right by the relative sliding movement of the tectorial and basilar membrane. The hair deflections opens the MET channels (mechanoelectric channels) and let the K^+ ions enter the cell following their electrochemical gradients (stage 2), the entrance of positive charges depolarize the cell (stage 3). Because of the electromotility possessed by these cells the depolarization generates a force which elongates the cells (stage 4) and this induces a further hair deflection (stage 1) which reinforces the initial deflection.

reach the external hair cells in a considerable number. The feedback cycle just described is shown in figure 5.

The source of non-linearity and cochlear distortion responsible for the combination tones is in this cycle. The predominant contribution to the distortion seems to be attributable to the stage 2, i.e. to the non-linear behaviour of the MET channels, to the non-linear relationship between the hair deflection and the entrance of the K^+ ions. Thus, the physical mechanism of the third tone heard by Tartini is based on the molecular mechanism of the MET channels; it is not surprising that it has been unknown for so many years!

The cochlear positive feedback is the main factor responsible for the compressive behaviour and for the extraordinary sensitivity and selectivity of the cochlea: to illustrate this is enough to say that we can hear sounds which induce tympanic membrane movements of only 10^{-11} m (about 1/10 of the hydrogen ion diameter!) and we can discriminate between two frequencies which differ for less than 0.3%. A physiological manifestation of

Figura 6

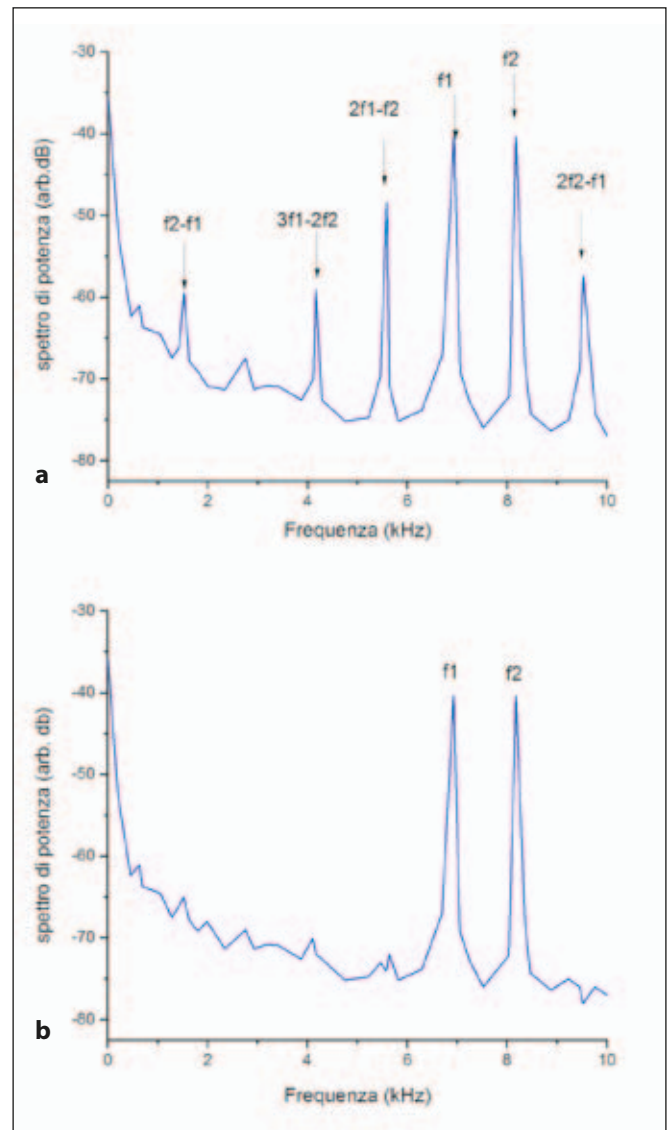
Spettri sonori registrati in topi normali (a) e transgenici mancanti della proteina stereocilina (b), in risposta all'applicazione simultanea di due toni f_1 ed f_2 . Notare che nel topo transgenico mancano del tutto i prodotti della distorsione $f_2 - f_1$, $2f_2 - f_1$ eccetera (da Avan et al., modificata).

custiche f_1 e f_2 nel canale auricolare di un topo normale (a) e di un topo transgenico (b) nel quale manca la proteina stereocilina. Questa proteina unisce le ciglia delle varie cellule e si trova anche nelle connessioni tra le ciglia delle cellule esterne e la membrana tettoria. A causa di questa mancanza, nel topo transgenico il feedback positivo non funziona correttamente e come conseguenza mancano del tutto i prodotti della distorsione (i toni di combinazione) ben presenti invece nel topo normale (figura 6b).

Sulla base dei dati attuali è possibile spiegare il diverso comportamento dei toni $f_2 - f_1$ (ordini pari) da quello dei toni $2f_1 - f_2$, $3f_2 - 2f_1$, $4f_1 - 3f_2$ (ordini dispari) al variare della frequenza e dell'intensità sonora che abbiamo già visto (per esempio nella figura 3). La distorsione quadratica ($f_2 - f_1$) sembra causata dalla presenza di un fattore non lineare simmetrico nella funzione di trasferimento dei canali MET mentre la distorsione cubica ($2f_1 - f_2$) dipende da un fattore non lineare asimmetrico.

La non linearità

Oltre a Helmholtz, altri autori hanno analizzato teoricamente gli effetti della non linearità di un sistema sulla



the hair cell motility and of the positive feedback mechanism is constituted by the spontaneous otoacoustic emissions (OAE) seen before. These can be found in the auricular channel of normal individual in absence of external sounds, because of spontaneous movements of the external cells which induce vibrations of the basilar membrane. The presence of spontaneous OAE is used as screening of the auditory apparatus of newborns.

Experimental evidence showing that the cochlear distortion originates from the feedback mechanism involving the external hair cells is also shown by the data of figure 6. The spectra shown in figure (stimulated OAE) are recorded in response to the simultaneous application of two tones frequencies f_1 and f_2 in the auricular channel of a normal mouse (a) and a transgenic mouse (b) missing the protein stereocilin. This protein links the hairs of the cells and it is also found in the connections between the hair of the external cells and the tectorial membrane. In absence of stereocilin the positive feedback mechanism does not work properly

and therefore the distortion products (the combination tones) are missing whereas they are clearly present in the WT mouse (figure 6b). Based on the current theory for the cochlear distortion it is possible to explain the different behaviour of the tones $f_2 - f_1$ (even order tones) and $2f_1 - f_2$, $3f_2 - 2f_1$, $4f_1 - 3f_2$ (odd order tones) with frequency and sound intensity seen before. The quadratic distortion ($f_2 - f_1$) seems caused by the presence of a symmetrical and non-linear factor in the transfer function of the MET channels, whereas the cubic distortion ($2f_1 - f_2$) depends on a non-linear asymmetrical factor.

The non-linearity

Following Helmholtz, the effects of a system non-linearity on the distortion have been analyzed theoretically by several authors using different ways to introduce the non-linearity. It has been shown in this way that even more complex combination tones can arise from

Figure 6

Acoustic spectra recorded in normal (WT) (a) and transgenic mice missing the protein streocilin (b), in response to the simultaneous application of two tone at f_1 and f_2 frequency. Note that in the transgenic mouse the distortion products $f_2 - f_1$, $2f_1 - f_2$ etc. are missing (from Avan et al., modified).

distorsione, usando formule diverse per introdurre la non linearità. Si è visto così che anche i toni di combinazione più complessi possono derivare direttamente dall'interazione delle frequenze f_1 e f_2 senza ricorrere alle armoniche e all'interazione di queste con i toni di combinazione come ipotizzato da Helmholtz. Possiamo assumere infatti che la distorsione auditiva derivi da una non linearità generale del sistema che può essere descritta dall'equazione:

$$k = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 \dots$$

dove a, b, c, d... sono costanti.

La soluzione di quest'equazione per l'applicazione di due sinusoidi [$x = \sin(w_1t) + \sin(w_2t)$], di frequenza f_1 e f_2 mostra la presenza del tono $f_2 - f_1$ già vista da Helmholtz (derivato dal termine in bx^2 e chiamato per questo, come abbiamo già visto, *distorsione quadratica*), del tono $2f_1 - f_2$, derivato dal termine cx^3 (*distorsione cubica*) e tutti gli altri termini di ordine superiore. Questi risultati forniscono la base teorica dei dati sperimentali già visti in precedenza e offrono una spiegazione alle osservazioni di Tartini e ai commenti di Helmholtz su queste, come vedremo in seguito.

the direct interaction of the two frequencies f_1 and f_2 without implying the interaction of higher harmonics with simple combination tones as hypothesized by Helmholtz. Assuming, for example, that the auditory distortion is caused by a general non-linearity of the system, we can write that:

$$k = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 \dots$$

where a, b, c, d... are constant.

The solution of this equation for the simultaneous application of two sinusoidal waves [$x = \sin(w_1t) + \sin(w_2t)$] at frequency f_1 and f_2 , shows the presence of the tone $f_2 - f_1$ already shown by Helmholtz (derived from the term bx^2 and for this reason, as we have seen before, is called *quadratic distortion*), of the tone $2f_1 - f_2$ (derived from the cx^3 term and called *cubic distortion*) and all the others terms of superior order. These results give a theoretical base to the experimental results seen previously and offer an explanation of the Tartini's ob-

TARTINI-HELMHOLTZ

Helmholtz nel suo Trattato (1913) fa riferimento più volte al lavoro di Tartini notando che le stime del terzo suono erano in molti casi un'ottava sopra rispetto al tono differenza $f_2 - f_1$. Helmholtz considerava questo tono il solo praticamente udibile e per questa ragione ha ritenuto le osservazioni di Tartini incorrette di un'ottava. Tuttavia è difficile pensare che Tartini, violinista, compositore e studioso di fama riconosciuta, abbia udito e assegnato ai suoni di combinazione l'ottava sbagliata (più alta). Nei suoi trattati Tartini riporta in più occasioni non solo il nome delle note a cui corrispondono i terzi suoni ma anche la loro posizione sul pentagramma. Quindi non ci sono ambiguità o incertezze nelle osservazioni di Tartini che possano far pensare a un errore di ottava. Tartini ha analizzato il terzo suono intervallo per intervallo e per ognuno di essi (unisono, quinta giusta, terza minore eccetera), ha riportato il rapporto numerico $r = f_2/f_1$, fra la due frequenze delle note della diade. Ha riportato anche il rapporto $s = f_1/t$ fra la frequenza della nota più grave della diade f_1 e la frequenza del terzo suono t .

servations and of the comments made by Helmholtz on them as we will see later.

TARTINI-HELMHOLTZ

In several parts of his essay (1913) Helmholtz made some comments on Tartini's third tone observations, noting that the estimation of the third tones were almost always an octave higher than the difference tone $f_2 - f_1$ which Helmholtz considered the only one practically audible. For this reason, Helmholtz considered the observations made by Tartini incorrect by an octave. However, it seems difficult to believe that Tartini, renowned violinist, composer and scientist could have assigned to the third tones the wrong (higher) octave. In his books, Tartini reports in several occasions not only the name of the notes corresponding to the third tones but also shows their position on the staff (figure 1). Hence there are no ambiguities or uncertainties in his observations which may lead one to think that he made

Negli esempi mostrati da Tartini, r ed s corrispondono a intervalli musicali precisi ($3/2$, $4/3$ eccetera); ricordiamo tuttavia che il terzo suono veniva udito da Tartini per qualsiasi valore del rapporto f_2/f_1 . Si consideri adesso il suono differenza $f_2 - f_1$ e lo si confronti con il terzo suono udito da Tartini, avremo che: $f_2 - f_1 = st(r-1)$. Nella tabella 1 sono riportati i valori che si ottengono da quest'equazione. Si noter  che il rapporto $t/(f_2 - f_1)$ (quarta colonna nella tabella 1) risulta nella maggior parte dei casi pari a 2, cio  il terzo suono t   spesso di frequenza doppia, cio  un'ottava sopra, il suono di combinazione $f_2 - f_1$. Da qui la convinzione di Helmholtz, gi  menzionata, che Tartini assegnasse erroneamente il terzo suono all'ottava superiore (come si vede dalla tabella tra tutti i terzi suoni riportati da Tartini solo quello per la sesta maggiore $5/3$ corrisponde effettivamente alla frequenza del suono differenza $f_2 - f_1$).

Sulla base della nuova interpretazione della non linearit  e dei risultati degli esperimenti moderni, oggi riteniamo percepibili una gamma di suoni di combinazione con frequenza $mf_1 + nf_2$, dove m ed n sono numeri interi. Assumendo che $t = mf_1 + nf_2$, cio  interpretando il suono riportato da Tartini come un termine noto e cercando m ed n che lo producono come suono di combinazione e

ricordando che $s = f_1/t$ e $r = f_2/f_1$, otteniamo l'equazione lineare diofantea

$$1/s = rn + m$$

Per ogni intervallo musicale r , quest'equazione pu  avere o infinite o nessuna soluzione. Nella tabella 1 "non risolubile" significa che l'equazione non ammette soluzioni. Nel caso sia invece risolubile, viene mostrata una soluzione (fra le infinite possibili). Con l'eccezione dei toni e semitoni, per i quali non abbiamo una soluzione semplice, tutti gli altri intervalli corrispondono ai suoni di combinazione gi  visti (per esempio nella figura 3). Come dicevamo, questi risultati forniscono anche una spiegazione convincente alle osservazioni riportate da Tartini: supponiamo, per esempio, di suonare due note in rapporto di $4/3$ (intervallo di quarta giusta), secondo Helmholtz il suono di combinazione risultante sarebbe $f_2 - f_1$ e quindi $4-3 = 1$, cio  2 ottave sotto alla nota pi  acuta del bicordo. Secondo le osservazioni di Tartini il terzo suono era invece un'ottava sotto la nota pi  acuta. Tartini evidentemente non udiva il tono $f_2 - f_1$, ma $2f_1 - f_2$. Infatti, $2 \times 3 - 4 = 2$, un'ottava sotto la nota acuta. Se invece il rapporto fra le due note   $8/5$ (sesta minore),

an error of one octave. Tartini analyzed the third tone interval by interval. Each musical interval (unison, perfect fifth, minor third etc.) corresponds to a numerical ratio $r = f_2/f_1$ between the two notes of the dyad. For each of these, Tartini also showed the ratio between the frequency of the lower note of the dyad f_1 and the third tone frequency t . In the examples shown by Tartini, r was always a precise musical interval ($3/2$, $4/3$ etc.), we will recall, however, that the third tone can be heard for any value of the f_2/f_1 ratio. Consider now the difference tone $f_2 - f_1$ and compare it with the tones heard by Tartini, we will have that: $f_2 - f_1 = st(r-1)$. The values obtained with this equation are shown table 1. We will note that the ratio $t/(f_2 - f_1)$ (4th column) is, in the great majority of the cases, equal to 2, i.e. the third tone t has frequency two times higher, i.e. an octave above, than the difference tone $f_2 - f_1$. This is the reason why Helmholtz reported that Tartini assigned erroneously the third tone one octave too high (*it can be seen from the table that among all the third tones heard by Tartini,*

only that of the major sixth (5/3) actually corresponds to the frequency of the difference tone $f_2 - f_1$.

On the bases of the new interpretation of the non-linearity and of the results of the contemporary experiments, nowadays we consider audible a group of combination tones with frequency of $mf_1 + nf_2$ where m and n are two integer numbers. If $t = mf_1 + nf_2$, i.e. interpreting the Tartini's third tones as a known term and looking for m and n that give rise to it, and remembering that $s = f_1/t$ and $r = f_2/f_1$ we obtain the linear Diophantine equation:

$$1/s = rn + m$$

For each musical interval r , this equation may have either no solution or infinite solutions. In this last case, the fifth column of table 1 shows one solution among the infinite possible. Except for the tones and halftones, for which we do not have a simple solution, all the other intervals correspond to the combination tones already seen (for example in figure 3). As we mentioned earlier, these

Tabella 1 Terzi suoni riportati da Tartini (1754) per vari intervalli**Table 1** Third tone reported by Tartini (1754) for various intervals

<i>Nome intervallo</i>	$r = f_2/f_1$	$s = f_1/t$	$t/(f_2 - f_1)$	<i>Suono di combinazione</i>
<i>Interval name</i>	$r = f_2/f_1$	$s = f_1/t$	$t/(f_2 - f_1)$	<i>Combination tone</i>
Ottava	2	Non definito	Non definito	Assente
Octave	2	Undefined	Undefined	Absent
Quinta giusta	3/2	1	2	$2f_1 - f_2$
Perfect fifth	3/2	1	2	$2f_1 - f_2$
Quarta giusta	4/3	3/2	2	$2f_1 - f_2$
Perfect fourth	4/3	3/2	2	$2f_1 - f_2$
Terza maggiore	5/4	2	2	$3f_1 - 2f_2$
Major third	5/4	2	2	$3f_1 - 2f_1$
Terza minore	6/5	5/2	2	$4f_1 - 3f_2$
Minor third	6/5	5/2	2	$4f_1 - 3f_2$
Tono maggiore	9/8	4	2	$7f_1 - 6f_2^*$
Major tone	9/8	4	2	$7f_1 - 6f_2^*$
Tono minore	10/9	9/2	2	$8f_1 - 7f_2^*$
Minor tone	10/9	9/2	2	$8f_1 - 7f_2^*$
Semitono maggiore	16/15	21	~0,71	Non risolubile
Major semitone	16/15	21	~0.71	Not resolved
Semitono minore	25/24	26	~0,92	Non risolubile
Minor semitone	25/24	26	~0.92	Not resolved
Sesta minore	8/5	5/2	~0,67	$2f_1 - f_2$
Minor sixth	8/5	5/2	~0,67	$2f_1 - f_2$
Sesta maggiore	5/3	3/2	1	$f_2 - f_1$
Major sixth	5/3	3/2	1	$f_2 - f_1$

I valori di r sono riportati come frazioni. Nel testo di Tartini compaiono invece i rispettivi nomi: per esempio, Sesquiterza a indicare 4/3 oppure Sesquidecimaquinta a indicare 16/15. I toni con asterisco non sono mai stati uditi. Il terzo suono riguardante l'ottava manca perché assente secondo Tartini.

The r values are shown here as fractions. In the Tartini's original text the 4/3 and the 16/15 ratios were called with their old names, Sesquiterza and Sesquidecimaquinta, respectively. The values with the asterisk have never been heard and the third tone for the octave is missing because it was never heard by Tartini.

per Helmholtz ($f_2 - f_1$) avremmo avuto $8 - 5 = 3$ mentre Tartini sentiva il suono $2 \times 5 - 8 = 2$ o $2f_1 - f_2$. I suoni sentiti da Tartini con i rapporti $5/4$ (terza maggiore) e $6/5$ (terza minore) corrispondono a valori più alti di combinazioni come abbiamo già visto dalla tabella. Per la prima Tartini udiva $3f_1 - 2f_2$ o $3 \times 4 - 5 \times 2 = 2$ e per la seconda $4f_3 - 3f_2$, cioè $4 \times 5 - 3 \times 6 = 2$ ancora una volta un'ottava sopra ai valori previsti da Helmholtz che in entrambi i casi danno $f_2 - f_1 = 1$.

Come sappiamo oggi, sia $f_2 - f_1$ che $2f_1 - f_2$, $3f_2 - 2f_1$ eccetera fanno parte dei toni di combinazione udibili, quindi sia le osservazioni di Tartini che quelle di Helmholtz, che udiva $f_2 - f_1$, risultano corrette. I due suoni infatti si possono udire contemporaneamente. Stupisce tuttavia, nei dati di Helmholtz, l'assenza di osservazioni corrispondenti a tutti gli altri suoni di combinazione di ordine superiore. Si potrebbe obiettare, al riguardo, che Helmholtz nei suoi esperimenti usava principalmente diapason che sono generatori sinusoidali puri, mentre Tartini, Young e Blein usavano strumenti musicali (violini o oboe o corde sonore) i quali producono note con molte armoniche. Tuttavia, questa differenza non può spiegare la mancata osservazione dei toni di combinazione superiori da parte di Helmholtz, perché questi toni

sono ben presenti negli esperimenti moderni effettuati con onde sonore puramente sinusoidali.

IL TERZO SUONO E LA MUSICA

Nel suo "Trattato di Musica secondo la vera scienza dell'Armonia" Tartini non si limita ad analizzare il terzo suono, ma lo include anche in una enunciazione di una teoria musicale molto complessa e controversa il cui esame va oltre le motivazioni di questo articolo. È interessante tuttavia illustrare brevemente alcuni aspetti specifici più prettamente legati al fenomeno del terzo suono. Per questo è necessario introdurre il fenomeno acustico degli armonici. Una prova empirica dell'esistenza degli armonici, era stata prodotta da Marin Mersenne (1588-1648) nel 1637 con l'utilizzo della tromba, ma è soltanto a partire dal 1700 che il fisico e matematico francese Joseph Sauveur (1653-1716) concepisce scientificamente la teoria degli armonici: "Meditando sui fenomeni dei suoni, mi accadde di notare che, soprattutto durante la notte, nel caso di corde lunghe, si odono, oltre il suono principale, degli altri piccoli suoni che si trovano alla dodicesima ed alla diciassettesima di questo suono; e che oltre quei suo-

results give us a convincingly explanation of the observation made by Tartini: let supposed to play two notes with a f_2/f_1 ratio of $4/3$ (just fourth interval), according to Helmholtz the resulting combination tone would be $f_2 - f_1$, hence, $4 - 3 = 1$, i.e. two octaves below the highest note of the dyad. According to Tartini's observations the third tone was instead one octave below the highest note. Clearly Tartini did not hear the difference tone $f_2 - f_1$, but the combination tone $2f_1 - f_2$. In fact, $2 \times 3 - 4 = 2$, one octave below the highest note. If the ratio between the two notes is instead $8/5$ (minor sixth), for Helmholtz we will have: $8 - 5 = 3$ whereas Tartini was hearing the tone $2 \times 5 - 8 = 2$ or $2f_1 - f_2$. The tone heard by Tartini with the ratios $5/4$ (major third) and $6/5$ (minor third) corresponds to higher values of combination tones. For the first ratio, Tartini heard $3f_1 - 2f_2$ or $3 \times 4 - 5 = 2$ and for the second $4f_3 - 3f_2$, or $4 \times 5 - 3 \times 6 = 2$, once again one octave higher than the values predicted by Helmholtz that in both cases give $f_2 - f_1 = 1$. As we know today, either $f_2 - f_1$ and $2f_1 - f_2$, $3f_2 - 2f_1$

etc., belong to the combination tones most commonly heard. Hence, we consider the third tones heard by Tartini as well as the tone $f_2 - f_1$ heard by Helmholtz, to be correct. In fact, both tones can be heard at the same time. It is surprising, however, that Helmholtz did not report any observation of the higher combination tones. One can object that this difference arises because of the different sound sources used: Tartini, as Young and Blein, musical instrument (violins, oboe or sonorous string) generating notes with a lot of harmonics, whereas Helmholtz used mostly diapasons which are sinusoidal sound generators. However, this difference cannot explain why Helmholtz did not hear the higher combination tones, because these tones are commonly heard in the modern experiments made with pure sinusoidal acoustic waves.

THE THIRD TONE AND THE MUSIC

In his book "Trattato di Musica secondo la vera scienza dell'Armonia" Tartini did not limit himself to the

“En méditant sur le phénomènes des Sons, on me fit remarquer, que surtout la nuit, on entendoit dans les longues cordes, outre le Son principal, d’autres petit Sons qui étoient à la douzième & à la dix-septième de ce Son; que les trompettes outre ce Son- là en avoient d’autres, dont le nombre des vibrations étoit multiple du nombre de celles du Son fundamental”
(Joseph Sauveur, 1701)

ni le trombe ne hanno degli altri, il cui numero di vibrazioni è multiplo del numero delle vibrazioni del suono fondamentale” (Joseph Sauveur, 1701).

Come oggi sappiamo, ogni fenomeno sonoro, escludendo l’onda sinusoidale che è un suono puro, è costituito da un elevato numero di onde sinusoidali con frequenza, ampiezza e fase diversa. La frequenza più bassa di queste costituisce la frequenza fondamentale mentre le altre componenti costituiscono gli armonici che caratterizzano il timbro dell’onda sonora. A titolo di esempio i primi dieci armonici di Do1 (frequenza fondamentale, 32,7 Hz) sono mostrati come note musicali nella figura 7.

Gli intervalli che si formano fra le note configurano l’ottava, la quinta, la terza, la quarta eccetera. Secondo Tartini il terzo suono prodotto dalle note di un accordo identifica il cosiddetto basso fondamentale, cioè la nota più grave dell’accordo nello stato fondamentale. Questa concezione è opposta a quella di Rameau secondo il quale gli accordi sono invece derivati dagli armonici del basso fondamentale e non viceversa.

La figura 8 mostra un esempio desunto dal Trattato di Tartini che mostra un’applicazione pratica del terzo suono che costituisce il basso nella figura. Notiamo la presenza di varie cadenze e di una progressione. Nel linguag-

gio musicale la struttura formale (armonica, melodica e ritmica) che determina un passaggio da uno stato di moto ad uno stato di riposo viene denominata *cadenza*. È caratterizzata da una serie di accordi che ruotano intorno alle tre funzioni principali dell’armonia distinguibili in tonica (primo grado della scala), sottodominante (quarto grado) e dominante (quinto grado). Gli accordi 6-7-8, per esempio, costituiscono una cadenza semplice o perfetta formata dal quinto e dal primo grado. Nello stesso esempio troviamo anche una piccola progressione con al basso quarte ascendenti. Il termine *progressione* in musica indica un procedimento simmetrico, ascendente o discendente, in cui una stessa struttura formale viene replicata più volte. Nel 1700, epoca di Tartini, le strutture formali appena descritte erano tra i cardini della composizione musicale. La possibile applicazione del terzo suono come basso fondamentale confermava dunque l’importanza non solo teorica ma anche pratica della scoperta di Tartini. Come si può vedere dall’esempio della figura 8, Tartini oltre alla terza minore 7/6, riconosce la funzione e la consonanza della settima naturale 7/4 come si evince anche dal suo trattato: “*Dunque una tal settima è consonante, non dissonante. Dunque, non ha bisogno di esser apparecchiata (ossia non ha bisogno di preparazione), né di esser risolta; può a-*

analysis of the third tone but included it in a complex and controversial musical theory which will not be discussed here. It is however interesting to show briefly some specific aspects of the theory more closely related to the third tone phenomenon. For this purpose, it is important to introduce the acoustic phenomena of harmonics. Empirically, harmonics were firstly described by Mersenne in 1673 with the use of trumpet but it was only in 1701 that the French physicist and mathematician Joseph Sauveur (1653-1716) conceived scientifically the theory of harmonics: “Reflecting on the phenomenon of the sound, I noted that, mainly during the night, in the case of long strings, we can hear, in addition to the main note, some other small notes who are at the twelfth and at the seventeenth of the main note; and that the trumpets, in additions to those small sounds, have some other sounds, whose number of vibrations were multiple of the number of vibrations of the main note” (Joseph Sauveur, 1701).

As we now know, any acoustic phenomenon, excluding the sinusoidal wave which is a pure tone, is constituted by a great number of sinusoidal waves with various amplitudes, frequencies and phases. For a note on a musical instrument, the lowest frequency is the fundamental frequency of the tone whereas all the other components constitute harmonics which characterize the timbre of the sound. To show an example, the first ten harmonics of C1 (fundamental frequency, 32.7 Hz) are shown as musical notes in figure 7.

The intervals formed between the notes configure the octave, the fifth, the third, the fourth etc. According to Tartini the third tone resulting from the notes of a chord identify the so called *fundamental bass*, i.e. the lowest note of the chord in the fundamental state. This conception is opposite to that of Rameau who considers that the chords are derived from the harmonics of the fundamental bass and not vice-versa.

Figure 8 shows as example taken from the Tartini’s book showing a practical application of the third tone

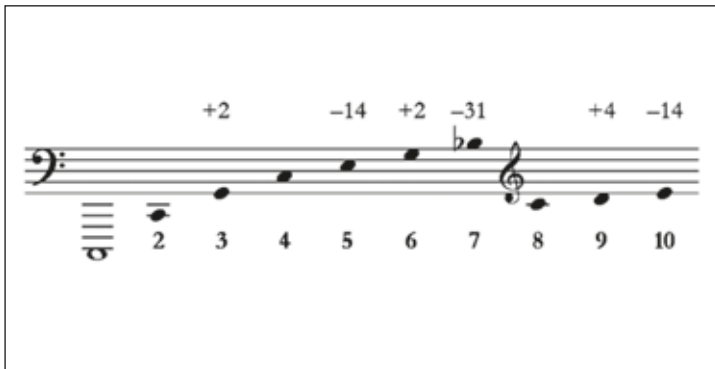


Figura 7

I primi dieci armonici di Do 1 con relativa numerazione e scarti relativi alle note temperate (in cent).

Notare che il settimo armonico è molto calante (-31 cent) rispetto alla scala temperata.

Figure 7

First 10 harmonics of C1 with the relative numbers and differences relative to the tempered notes (in cents).

Note that the seventh harmonic is great diminished (-31 cent) compared to the tempered scale.

scender, e può discendere; e quando la intonazione sia giusta, starà egualmente bene.” Con quest’affermazione Tartini si distanzia dalla posizione di Rameau, che non considera invece la consonanza settimanale. Tartini, peraltro, riporta un’osservazione molto interessante riguardante alcuni intervalli specifici; egli ne segnala tre che producono un terzo suono che sembra non concordare con gli altri: sono il sesto, l’ottavo e il decimo. Si tratta di due terze minori e di un tritono composto da tre toni altrimenti detto quarta aumentata. Perché questi tre intervalli producono un terzo suono diverso da quello di tutti gli altri intervalli simili proposti dal musicista italiano? Dall’esempio degli armonici di Do mostrato in precedenza, notiamo che gli intervalli posti tra il quinto e sesto armonico e il sesto e il settimo sono due terze minori. Questo naturalmente vale anche nella scala di La maggiore che è quella dell’esempio di Tartini. In questo contesto Tartini, utilizzando le antiche proporzioni, spiega che l’intervallo $6/5$ è una terza minore più larga rispetto all’intervallo $7/6$ che Tartini chiama sesquisesta. Questo perché quest’ultima comprende il settimo armonico che risulta sensibilmente calante.

Il risultato di questa differenza, seppure relativamente piccola, è che il terzo suono è diverso nelle due terze nonostante che in apparenza si tratti di due intervalli identici. Lo stesso succede per gli intervalli tra l’ottavo ed il nono armonico. Con queste osservazioni Tartini apre una possibilità sconfinata di generare suoni di combinazione andando ben oltre le diadi composte da note temperate e inserendosi nel campo della microtonalità.

CONCLUSIONI

L’attività di ricerca seguita alla scoperta del terzo suono di Tartini nel 1754 ha portato nel corso di circa due secoli e mezzo a una mole impressionante di lavori nell’ambito dell’acustica, della fisiologia, della psicofisiologia e della musica, dedicati allo studio di questo fenomeno. Sulla base dei risultati di queste ricerche, molto attive ancora oggi, sappiamo che il terzo suono fa parte di una serie di suoni chiamati *suoni di combinazione* che sono prodotti dalla distorsione cocleare. Questa distorsione è una diretta conse-

which constitutes the bass in the figure. The example shows some cadences and a progression. In musical language the *cadence* is the formal structure (harmonic, melodic and rhythmic) that determine the passage from a movement state to a rest state. It is characterized by a series of chords involving the three main functions of harmony which are: tonic (the first note of the scale), subdominant (fourth grade) and dominant (fifth grade). The chords 6-7-8, for example, constitute a simple or perfect cadence formed by the fifth and the first notes. In the same example we also found a small progression with an ascending fourth as bass. We recall that a progression in music means a symmetrical ascending or descending procedure in which the same formal structure is repeated more times. In 1700, Tartini’s period, the formal structures seen above were the most important in musical composition. The possible application of the third tone as the fundamental bass confirmed therefore not only the theoretical but also the practical importance of Tartini’s discovery.

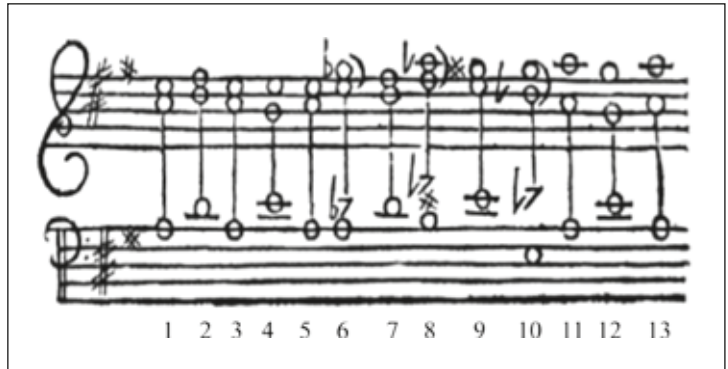
As can be seen from the example of figure 8, Tartini, in addition to the minor third $7/6$, acknowledges the function and the consonance of the natural seventh $7/4$ as can be deduced from his words: “Hence, such a seventh is consonant not dissonant. Hence it does not need to be prepared not to be resolved; it can rise or descend and when the intonation is right it will sound well”.

With this affirmation Tartini distanced himself from the position of Rameau which did not consider the consonance of the seventh.

In relation to the example of figure 8, Tartini made a very interesting observation regarding some specific intervals: three of them, the number 6, 8 and 10 give rise to a third tone which does not seem to concord with the others. They are two minor thirds and a triton composed by three tones also known as augmented fourth. Why these intervals should differ from other similar intervals shown by Tartini in his examples? Looking at the harmonics of C shown in figure 7 one can see that the intervals between the fifth and the sixth

Figura 8

*Esempio di applicazione del terzo suono
come basso fondamentale.
Originale ripreso dal trattato di Tartini (1754).*

**Figure 8**

*An example of the third tone as fundamental bass.
Original figure taken
from Tartini's treatise (1754).*

guenza del raffinato meccanismo basato sul feedback meccanico-elettrico positivo che amplifica i movimenti della membrana basilare conferendo alla coclea le sue straordinarie caratteristiche di sensibilità, dinamica e selettività. Sulla base dei dati analizzati in questo lavoro, la prima considerazione da fare è che i toni di combinazione non sono artefatti incerti e sfuggenti che possono essere sentiti solo da esperti o studiosi di psicoacustica. Essi, al contrario, sono fenomeni ben classificati e nelle opportune condizioni sono udibili da chiunque. Questi suoni sono applicati in musica da molti compositori; non sono né scritti né suonati direttamente ma vengono sentiti durante un'esecuzione e fanno parte della composizione. Una seconda considerazione riguarda le osservazioni di Tartini: al contrario di quanto suggerito da Helmholtz, queste appaiono corrette e corrispondono quasi esclusivamente ai toni di combinazione di ordine dispari ($2f_1 - f_2$, $3f_1 - 2f_2$ eccetera). Quindi, in generale, il terzo suono di Tartini non corrisponde alla differenza delle due frequenze generatrici $f_2 - f_1$, come talvolta viene assunto anche in ambienti musicali. Il terzo suono quindi non può essere ottenuto dalla sottrazione degli ar-

monici. Come già riportato da Tartini stesso, rimanendo nell'intervallo di udibilità, il terzo suono viene udito sempre, indipendentemente dal valore del rapporto tra le due note primarie. Alla luce di queste considerazioni dobbiamo riconoscere a Tartini le grandi capacità di osservazione e di analisi proprie di un attento e valente sperimentatore che si aggiungono alle ben più note capacità di violinista, compositore e studioso di teoria musicale.

Gabriele Caselli

Compositore
Pisa
caselligabriele@gmail.com

Giulio Masetti

Dipartimento di Informatica,
SEDC Lab, ISTI-CNR
Università degli Studi di Pisa
giuliomasetti@diunipi.it

Giovanni Cecchi

Università degli Studi di Firenze
giovanni.cecchi@unifi.it

and the sixth and seventh harmonics are two minor thirds. This occurs also for the scale of major A that is scale of the example of figure 8. Utilizing the old musical notation of the proportions, Tartini explains that the $6/5$ interval is a minor third wider than the interval of minor third $7/6$ called by Tartini sesquisepta. This is because the last one includes the seventh harmonic that is sensibly flat. The results of this difference, although rather small, is that the two third tones are different from each other in spite of both intervals seeming identical. The same apply between the eighth and ninth intervals. With these observations, Tartini opens a wide possibility of third tones production going well beyond the dyad made of temperate notes and inserting himself in the field of microtonality.

CONCLUSIONS

The research and discussion around the third tone discovery by Tartini in 1754 has led in the two and half

centuries to an impressive number of papers in the field of acoustic, physiology, psychophysiology and music dedicated to the study of this phenomenon. Based on this research, still very active today, we now know that the third tone is part of tone series called combination tones produced by the cochlear distortion. The distortion is a direct consequence of the extraordinary mechanism based on the mechano-electric positive feedback, realized by the outer and inner hair cells, which amplifies the basilar membrane movements conferring on the cochlea its exceptional properties of sensitivity, dynamics and selectivity. On the bases of the data reviewed here, the first conclusion to draw is that the third tones or the combination tones, are not uncertain and vanishing artifacts which can be heard only by experts or by psychoacoustic scientists. They are, on the contrary, a well classified phenomenon and under given conditions, can be heard by anybody. These tones are applied in music; they are not written nor directly played but they are heard during performance and are

- Avan P, Buki B, Petit C. Auditory distortions: origins and functions. *Physiol Rev* 2013; 93: 1563-619.
- Barbieri P. Gli armonisti Padovani nel Settecento. In: S. Durante, P. Petrobelli (a cura di). *Storia della musica al Santo di Padova*. Vicenza: Neri Pozza Editore, 1990.
- Gold T. Hearing II: the physical bases of the action of the cochlea. *Proc Royal Soc Lond B Biol Sci* 1948; 881: 135.
- Goldstein JL. Auditory nonlinearity. *J Acoust Soc Am* 1967; 41(3): 676-89.
- Hindemith P. *Craft of musical composition*. New York: Associated Music Publisher, 1942-45.
- Jones At. The discovery of difference tones. *American Journal of Physics* 1935; 3: 49.
- Plomp R. Detectability threshold for combination tones. *J Acoust Soc Am* 1965; 37: 1110-23.
- Sauveur J. *Principes d'Acoustique et de Musique*. Paris: Academie Royal des Sciences, 1701.
- Tartini G. *Trattato di musica secondo la vera scienza dell'armonia*. Padova: Nella Stamperia del Seminario, 1754.
- Tartini G. *De' principj dell'armonia musicale contenuta nel diatonico genere*. Padova: Nella Stamperia del Seminario, 1757.
- von Helmholtz H. *Die Lehre von den Tonempfindungen als Physiologische Grundlage fur die Theorie der Musik*. 6th ed. Braunschweig, Germany: Verlag F. Vieweg & Sohn, 1913.
- Weber W. Ueber die Tartini'schen Töne. *Ann Phys Chem* 1829; 15: 216-22.
- Young T. Outlines of experiments and inquiries respecting sound and light. *Phil Trans* 1800; 90: 106-150.

part of the composition. A second consideration regards the third tones heard by Tartini: in contrast to Helmholtz's idea, these appear to be correct and correspond almost exclusively to the combination tones of odd order ($2f_1 - f_2$, $3f_1 - 2f_2$ etc.) which are commonly heard. Hence the Tartini's third tone is not equal to the difference tone $f_2 - f_1$, as sometimes we can read even in the musical literature and it cannot be obtained by the method of the harmonic subtraction, often used to obtain $f_2 - f_1$. As reported by Tartini, the third tone is heard for any values of the ratio between the principal tones. In the light of these observations we have to acknowledge to Tartini a great observational capacity and analysis, proper of a brilliant and careful experimenter which adds to his more recognized capacity of violinist, composer and theoretical musician.

Riassunto

Nel 1713 circa, Giuseppe Tartini celebre violinista, compositore e teorico musicale scopre che – suonando contemporaneamente due note diverse con il violino – sente un altro suono da lui chiamato “terzo suono” che si aggiunge alle due note suonate. Questa scoperta ha dato il via a una imponente serie di ricerche, in corso ancora oggi, nel campo dell'acustica, della fisiologia, della psicoacustica e della musica per definire le caratteristiche del terzo suono, il meccanismo fisico che ne è alla base e le implicazioni nel campo musicale. Questo lavoro riassume, sia pure succintamente, i risultati più importanti di queste ricerche. Oggi possiamo dire che in realtà esistono molti “terzi suoni” chiamati modernamente toni di combinazione. Questi suoni, che rivestono un ruolo importante nella sensazione uditiva e nella musica in particolare, nascono nella coclea e sono legati al raffinato meccanismo di amplificazione a reazione positiva che conferisce alla coclea le sue straordinarie caratteristiche di sensibilità, selettività e dinamica.

Parole chiave: terzo suono, fisiologia, Giuseppe Tartini

Abstract

Around 1713, Giuseppe Tartini, a celebrated violinist, composer and theoretical musician, discovered that while playing two different notes at the same time on the violin, he could hear another sound, called by him “the third tone”, which adds to the other two played notes. This discovery prompted an impressive sequence of scientific research, continuing up today, in the fields of Acoustic, Physiology, Psychoacoustics and Music, with the intent to define the third sound's characteristics, its physical mechanism and the implications in the field of music. This review concisely summarizes the most important results of this research. Today we know that there are many “third tones” called more appropriately combination tones. The combination tones have a very important role in the auditory sensation and in music. They arise from the cochlea and from the fine mechanism of positive feedback which confers upon the cochlea its extraordinary characteristics of sensitivity, selectivity and dynamics.

Key words: third tones, physiology, Giuseppe Tartini